

탄도궤도 실험장치 설명서 (ME-6830/ME-6831)

Ballistic Pendulum



제작사: PASCO Scientific

한국대리점: (주)와이케이사이언스 TEL: 02)546-1565

<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: 1.2em; font-weight: bold;"> 목 차 </div>

항목

저작권, 품질 보증 및 장비 반품

소개

부품

포물체 발사 장치의 일반 조작

탄동 진자 조작 이론

옵션 부품 포토게이트 까치발 설치

2 차원 충돌 장치 설치

포물체 발사 장치에 대한 예상

탄동 진자에 대한 예상

실험

1. 포물체 운동

2. 포토게이트를 이용한 포물체 운동

3. 포물체 사정 거리 vs. 각도

4. 포물체 경로

5. 에너지 보존

6. 2 차원에서의 운동량 보존

7. 벽에 맞는 높이가 최대인 각도 찾기

8. 포물체 속도 - 근사법

9. 포물체 속도 - 정밀법

10. 증명: 30° , 60° 의 사정 거리는 동일한가?

11. 증명: 두 공을 서로 다른 속도로 동시에 수평 발사하기

12. 증명: 고리 사이로 발사하기

13. 증명: 탄성충돌과 비탄성충돌

지도자 가이드

기술 지원

부 품

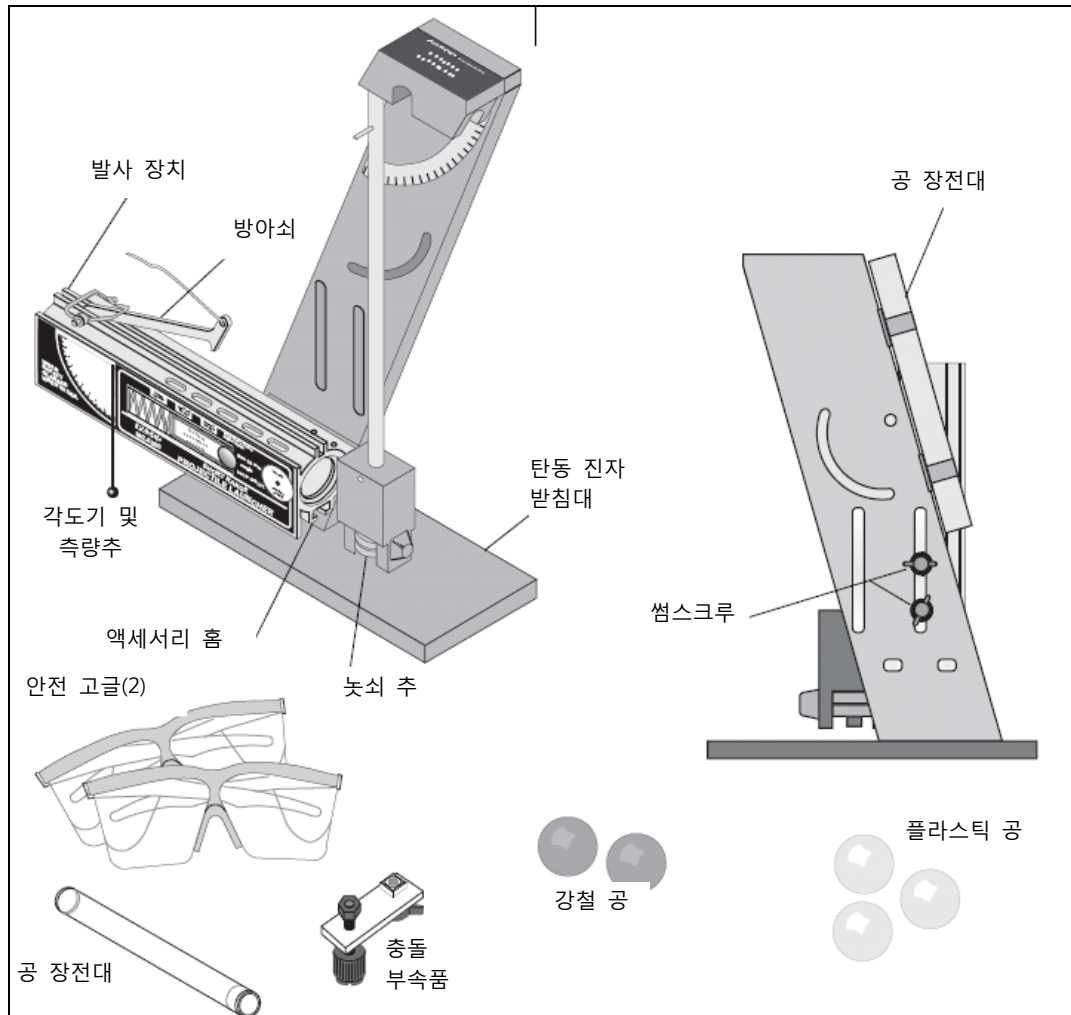
다음은 탄동 진자/ 포물체 발사 장치의 다양한 모델에 포함된 장비들에 대한 설명이다.

ME-6831 탄동 진자에는 다음 부품들이 포함되어 있다.

- 탄동 진자 받침대 (조립되어 있음)
- 강철 공 (2)

추가로, ME-6830 탄동 진자/ 포물체 발사 장치에는 다음 부품이 포함되어 있다.

- 근거리 발사 장치
- 탄약 장전대 (벨크로 (Velcro®)로 부착)
- 총돌 장치
- 플라스틱 공 (3)
- 낫쇠 진자 추 (2)
- 안전 고글 (2)



포물체 발사 장치의 일반 조작

① 준비

- 포물체 발사 장치를 사용하는 곳에서는 반드시 안전 고글을 착용한다.
- 포물체 발사 장치를 사용하는 실험에서는, 반드시 탄동 진자/ 포물체 발사 장치의 받침대를 튼튼한 탁자 위에 클램프로 고정하여 사용한다. 클램프를 사용할 때에는, 발사 장치의 라벨 쪽을 탁자 가장자리에 나란히 오게 하여, 측량추를 이용해 바닥에 대한 포구의 위치를 확인할 수 있도록 한다.
- 발사 각도를 조정하고자 할 때에는, 휘어진 홈을 사용하여 포물체 발사 장치를 까치 발에 장착할 수 있다. 또는 역학 카트(Dynamics Cart)에서처럼 수평으로만 발사할 경우에는, 받침대에 있는 두 개의 중앙 홈에 장착할 수도 있다.

② 조준

- 썸스크루 두 개를 모두 풀고, 발사 장치 측면에 장착된 측량추와 각도기가 가리키는 올바른 각도에 맞춰 발사 장치를 회전시키면, 수평면 위의 경사각을 조정할 수 있다. 각도를 맞춘 다음에는, 썸스크루를 다시 조인다.
- 발사 장치를 장전하지 않은 상태에서 발사 장치 뒤쪽 끝 구멍을 통해 장치를 들여다보면, (원숭이 사냥꾼 증명에서처럼) 표적을 꿰뚫어 볼 수 있다. 총신 안에는 두 개의 시계가 있는데, 발사장치의 각도와 위치를 조절하여 이 두 시계의 중앙을 표적에 맞춰 정렬한다.

③ 장전

- 피스톤은 항상 피스톤 안에 있는 공으로 젖히도록 한다. 공 없이 장전대를 사용하면 피스톤에 손상이 갈 수 있다.
- 피스톤 안에 공을 장전한다. 받침대 위의 벨크로에서 장전대를 분리한다. 발사 장치 측면의 거리 설정 홈을 확인하면서, 피스톤이 원하는 거리 설정에서 방아쇠에 걸릴 때까지 장전대로 공을 포신에 밀어 넣는다.
- 장전대를 뺀 다음 받침대에 있는 벨크로 보관 장소에 돌려 놓는다.
- 포물체 발사 장치가 장전되면, 포신 측면의 거리 슬롯들 중 하나에는 노란색 표시, 다른 하나에는 공이 보인다. 발사 장치의 장전 여부를 확인하려면, 포신의 옆면을 보면 된다. 절대 포신을 내려다보지 말 것!

④ 발사

- 공을 발사하기 전에, 앞에 사람이 없는지 반드시 확인한다.
- 공을 발사할 때에는, 방아쇠에 연결된 당김줄을 똑바로 위로 당긴다. 이 때, 1cm 정도만 당기면 된다.

- 방아쇠를 놓으면, 방아쇠의 스프링에 의해 방아쇠가 자동으로 초기 위치로 돌아간다.

⑤ 유지보수 및 보관

- 포물체 발사 장치는 특별한 유지 보수를 필요로 하지 않는다.
- 발사 장치에 절대 기름을 바르지 않는다.
- 보관 공간을 절약하려면, 각도를 90도에 맞추어 보관한다. 발사 장치에 포토게이트 설치용 까치발(Photogate Mounting Bracket)이나 포토게이트(Photogate)가 연결되어 있을 경우에는, 포토게이트가 연결되어 있는 상태 그대로 포신을 따라 까치발을 뒤로 밀어 낼 수 있다.

탄 동 진 자 이 론

개 요

탄동 진자는 포물체의 속도를 구하는 고전적인 방식이며, 또한 몇몇 물리학의 기본 원리를 보여주는 좋은 증거이다.

진자에 공을 발사하면 진자가 어느 정도 올라가는데, 진자가 도달하는 높이로부터 위치에너지 계산을 할 수 있다. 이 위치에너지는, 진자가 공에 부딪힌 직후, 진폭 바닥 부분에서의 진자의 운동에너지와 동일하다.

공과 진자의 충돌은 비탄성이고, 비탄성충돌에서 운동에너지는 보존되지 않으므로, 충돌 후 진자의 운동에너지와 진동을 시작하기 전 공의 운동 에너지가 완전히 동일하다고 할 수는 없다. 그러나 모든 형태의 충돌에서 운동량은 보존 되므로, 충돌 전 공의 운동량은 충돌 후 진자의 운동량과 같다는 사실을 알 수 있다. 이를 통해 공의 운동량과 질량만 알면, 초기 속도를 구할 수 있다.

공의 속도를 계산하는 방법에는 두 가지가 있다. 첫 번째 방법(근사법: approximate method)에서는 진자와 공이 함께 질량 중심에 위치한 점 질량(point mass)으로 작용한다고 가정한다. 이 방법은 회전 관성을 고려하지 않는다. 두 번째 방법보다는 빠르고 쉽지만, 정확도가 떨어진다.

두 번째 방법(정밀법: exact method)은 진자의 실제 회전 관성을 이용한다. 방정식은 조금 더 복잡하고, 진자의 관성 운동량을 찾기 위해 더 많은 데이터가 필요하지만, 일반적으로 그 결과는 더 정확하다.

참고로, 아래 등식에서 사용되는 약자 "cm"은 "질량 중심(center of mass)" 의미한다.

근 사 법

진폭 꼭대기에서의 진자의 위치에너지부터 시작하도록 하자.

$$\Delta PE = Mg\Delta h_{cm}$$

여기에서, M 은 진자와 공의 질량 합, g 는 중력 가속도, Δh 는 높이 변화이다. 높이 대신 다음을 대입한다.

$$\begin{aligned}\Delta h &= R(1 - \cos \theta) \\ \Delta PE &= MgR_{cm}(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

여기에서, R_{cm} 은 피봇포인트(pivot point)에서 진자/공 시스템의 질량 중심까지의 거리이다. 이 위치에너지는 충돌 직후 진자의 운동에너지와 동일하다.

$$KE = \frac{1}{2} Mv_P^2$$

충돌 후 진자의 운동량은,

$$P_p = Mv_p,$$

이를 앞의 등식에 대입하면,

$$KE = \frac{P_p^2}{2M}$$

이 등식을 풀어 진자의 운동량을 구하면,

$$P_p = \sqrt{2M(KE)}$$

이렇게 구한 운동량은 충돌 전 공의 운동량과 동일하다.

$$P_b = mv_b$$

이 두 등식을 같다고 놓고, KE에 우리가 알고 있는 위치에너지를 대입하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$mv_b = \sqrt{2M^2 g R_{cm} (1 - \cos \theta)}$$

이 식을 풀어 공의 속도를 구하고 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$v_b = \frac{M}{m} \sqrt{2g R_{cm} (1 - \cos \theta)}$$

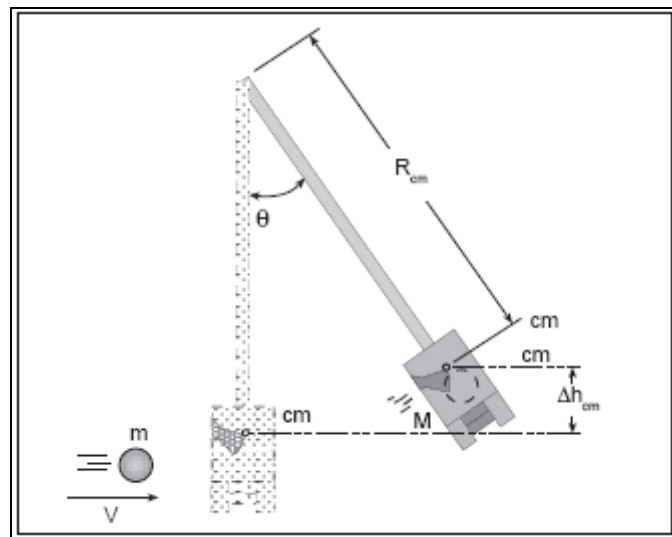


그림 1

정 밀 법

위치에너지는 위의 방법과 같은 식으로 구하면 된다.

$$\Delta PE = MgR_{cm} (1 - \cos\theta)$$

운동에너지를 구하기 위해, 선형 운동에너지 대신 각 운동에너지(angular kinetic energy) 등식을 이용하여, 각운동량 등식을 여기에 대입한다.

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$L_p = I \omega$$

$$KE = \frac{L_p^2}{2I}$$

여기에서, I 는 진자/공의 관성 운동량, ω 는 충돌 직후의 각속도이다.

앞에서와 마찬가지로, 각운동량에 대해 이 마지막 방정식을 풀면, 다음과 같다.

$$L_p = \sqrt{2I(KE)}$$

진자의 피봇포인트에서 측정한 바와 같이, 이 각운동량은 충돌 전 공의 각운동량과 같다.

$$L_b = mR_b^2 \omega = mR_b v$$

R_b 는 진자 피봇에서 공까지의 거리이다. (이 반경은 일반적으로 진자/공 시스템의 질량 중심에서 피봇 포인트까지의 거리인 R_{cm} 과 같지 않다.)

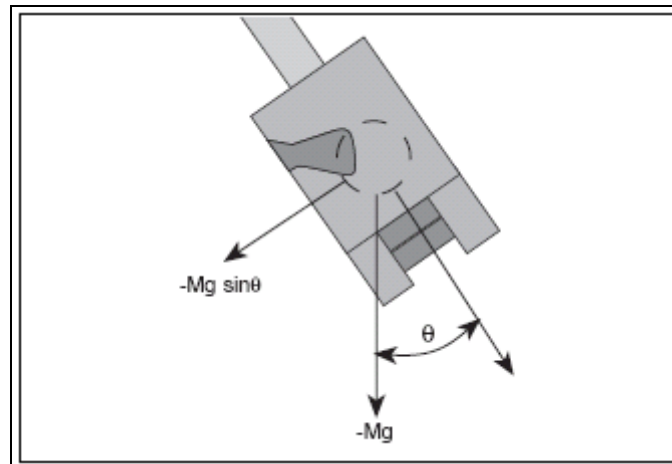


그림 2

이 두 운동량은 서로 같으므로,

$$mR_b v = \sqrt{2IMgR_{cm}(1 - \cos\theta)}$$

여기에서 v 를 구하면, 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{mR_b} \sqrt{2IMgR_{cm}(1 - \cos\theta)}$$

이제 우리는 진자와 공의 관성 운동량인 I 를 구해야 한다. 그러려면 먼저, 뉴턴 제2법칙의 회전동치(rotational equivalent)부터 시작해야 한다.

$$\tau = I\alpha$$

여기에서, τ 는 토크(torque), I 는 관성 운동량, α 는 각가속도이다. 진자의 질량 중심에 가해지는 힘은 간단히 Mg 이고, 진자 진폭 중심을 향하는 힘의 성분은 다음과 같다. (그림 2 참조)

$$F = -Mg \sin\theta$$

따라서, 진자의 토크는 다음과 같다.

$$I\alpha = -R_{cm}Mg \sin\theta$$

작은 각 θ 에 대해 $\sin\theta \approx \theta$ 이므로, 이를 대입하여 α 를 구하면,

$$\alpha \approx -\frac{MgR_{cm}}{I} \theta$$

이 된다. 이 각방정식은 선형 단순조화운동(linear simple harmonic motion) 방정식과 같은 형태이다.

$$\alpha = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

따라서, 선형과 각, 이 두 식을 비교해보면, 진자가 단순조화운동을 하고 있으며, 이 운동에서 각진동수 (ω)는 다음과 같다는 것을 알 수 있다.

$$\omega^2 = \frac{MgR_{cm}}{I}$$

여기에서 I 를 구하면 원하는 결과를 얻을 수 있다.

$$I = \frac{MgR_{cm}}{\omega^2} = \frac{MgR_{cm}T^2}{4\pi^2}$$

여기에서 T 는 진자 주기이다.

▶ 주의: 이 방정식에서 I 를 구하기 위해 우리는 작은 각도 근사치를 사용하였으나, I 는 θ 에 의존하지 않는다. 즉, 작은 진동을 이용하여 주기 T 를 구해야 하는 것이다. 그러나, 일단 해당 주기로 I 를 계산하고 나면, 실험의 다른 부분에서 얻게 되는 진폭과 상관 없이 I 의 값을 사용할 수 있다.

포토게이트 설치용 까치발 설치

PASCO 모델 ME-6821 포토게이트 설치용 까치발(Photogate Mounting Bracket)은 PASCO 포물체 발사 장치의 옵션 액세서리이다. 이 부품을 발사 장치 전면에 연결하고 한 두 개의 포토게이트를 평행으로 지지하여, 공의 포구 속도를 측정하는데 사용한다.

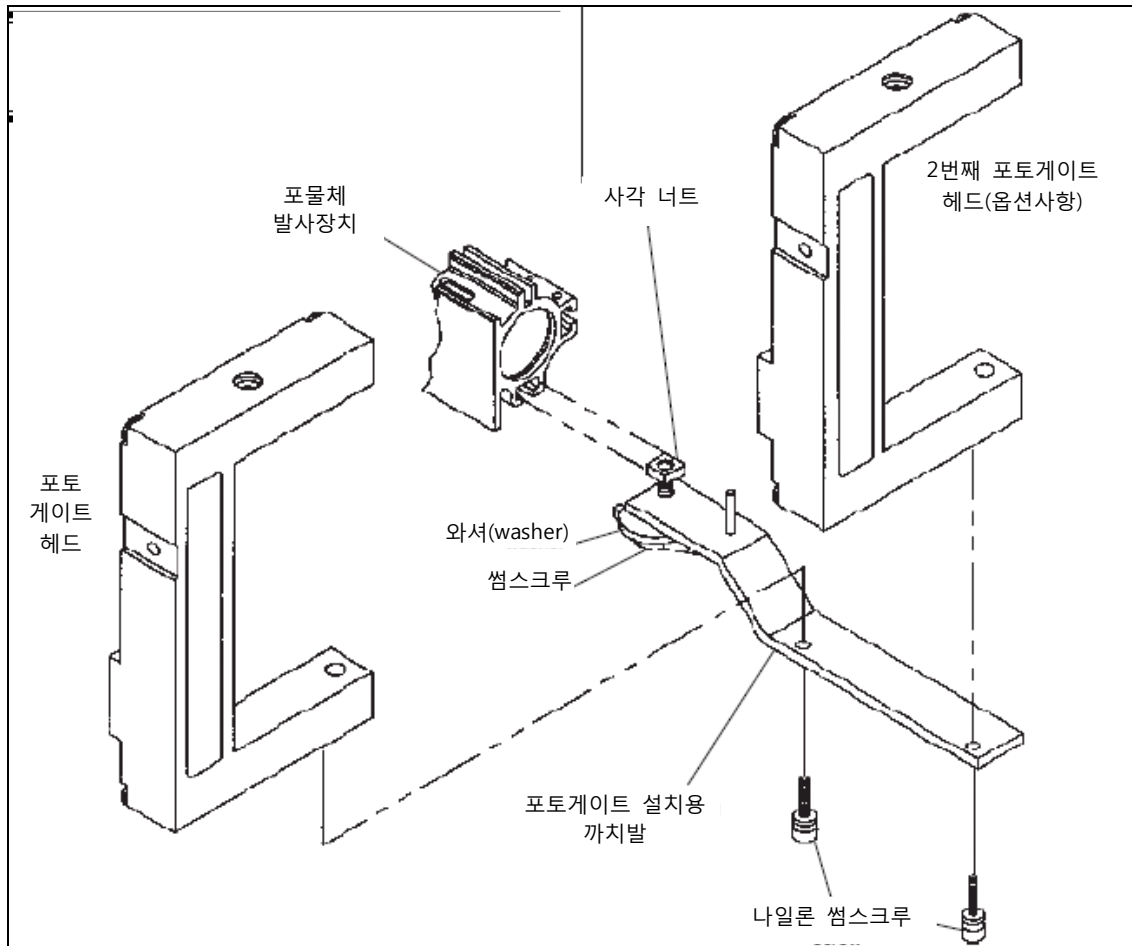
준비 절차

- ① 포토게이트 설치용 까치발의 썸스크루를 푼다.
- ② 까치발 부품을 포물체 발사 장치 앞면에 나란히 맞추는 다음, 맞춤못이 포신 홈에 들어갈 때까지 사각 너트를 포신에 밀어 넣는다.

(맞춤못은 정렬 가이드 역할을 하므로, 까치발을 올바르게 정렬하기 위해서 반드시 이 못을 홈 안으로 넣어야 한다.)

▶ 주의: 그림과 같이 사각 너트의 평평한 면이 포물체 발사 장치의 안쪽을 향하도록 한다.

- ③ 포토게이트 설치용 까치발을 원하는 위치에 밀어 넣은 다음 썸스크루로 고정 시킨다.
- ④ 포토게이트 헤드(head)에서 작은 막대 클램프의 나사를 푼다. (클램프 부품은 차후 사용을 위해 잘 보관해 둔다.)
- ⑤ 까치발 부품에 포함된 6-32x3/8"의 나일론 썸스크루를 이용하여 각 포토게이트를 설치용 까치발에 연결한다.
- ⑥ 포신에 가장 가까운 포토게이트가 빔(beam)을 가리지 않은 상태에서 최대한 포신에 가까워지도록 설치용 까치발을 뒤로 민다.
- ⑦ 발사 장치 보관 시, 포토게이트 설치용 까치발을 분리하지 않아도 된다. 포토게이트가 제자리에 있거나 또는 없는 포신을 따라 뒤쪽으로 밀어, 가능한 크기를 줄일 수 있다.



2차원 충돌 장치 설치

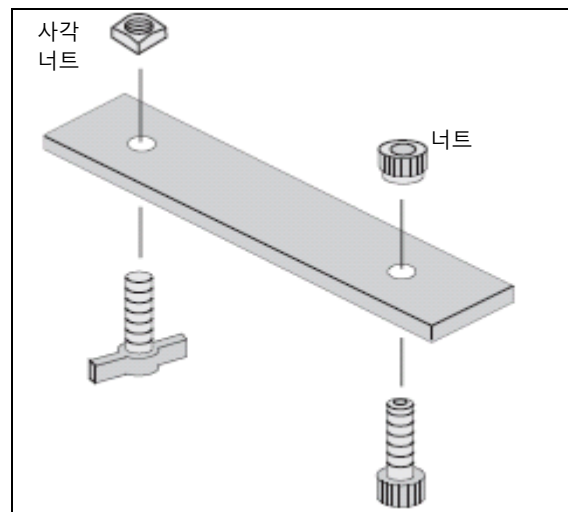
소 개

2차원 충돌 장치는 나사 2개, 너트 2개, 평평한 플라스틱 막대로 구성되어 있다. 포물체 발사 장치와 함께 사용하며, 포구 앞에 두 번째 공을 고정시켜 발사 장치에서 발사한 공이 이 공에 맞아 2차원 충돌을 유발하도록 한다.

조 립

충돌 장치를 조립하려면 먼저, 아래 그림과 같이 구멍에 나사를 넣고 너트로 조인다.

충돌 장치를 발사 장치에 설치할 때에는, 사각 너트를 포신 바닥에 있는 T자형 홈에 끼워 넣는다.



포물체 발사 장치에 대한 예상

다음은 도움이 되는 힌트 및 근사값들이다.

- ① 포구 속도는 각도에 따라 조금씩 달라진다. 수평으로 발사 했을 때의 포구 속도와, 수직으로 발사했을 때의 포구 속도의 차이는 0~8% 사이이며, 거리 설정 및 발사 장치 특징에 따라 달라질 수 있다.
- ② 장거리에서보다 단거리에서 분산 패턴이 더 작게 나타날 수 있는데, 이는 낮은 가속도에서는 공이 피스톤에 제대로 안착되지 않기 때문이다.
- ③ 포물체 발사 장치의 포구 끝은 각도로 인해 높이가 변하지는 않지만, 탁자에서 약 30cm(12인치) 떨어진 높이에 있다. 따라서, 단순 거리 공식을 이용해야 할 때에는, 포구와 같은 높이에 있는 탁자로 발사해야 한다.
- ④ 포물체 발사 장치의 받침대를 튼튼한 탁자에 단단히 고정시키면 분산 패턴을 최소화할 수 있다. 탁자가 조금이라도 흔들리면 바로 데이터 상에 나타난다.
- ⑤ 경사각은 0.5도 이내로 측정할 수 있다.

탄동 진자에 대한 예상

- ① 도달하는 각도는 0.5도 이내에서 반복되어야 한다.
- ② 공 속도 측정상의 모든 오류는 2.5%(정밀법) 또는 10%(근사법)를 초과해서는 안된다.

▶ 주의: 조절 가능한 수평 다리가 없어도 좋은 결과를 얻을 수 있다. 수평에서 조금 치우쳐도 큰 오류가 생기지 않는다.

실험 1: 포물체 운동

필요 기구:

- 포물체 발사 장치와 플라스틱 공
- 측정 추
- 미터 막대
- 카본지
- 흰 종이

목 적

이 실험에서는 특정 각도에서 발사한 공의 거리를 예상하고 검증한다. 공을 수평으로 발사한 다음 발사 장치의 사정 거리와 높이를 측정하여 그 초기 속도를 구한다.

이 론

공을 수평면 위에서 특정 각도로 탁자 밖으로 발사했을 때 그 착륙 지점을 예상하려면, 먼저 공의 초기 속도 (포구 속도)를 구해야 한다. 이 속도는, 공을 탁자에서 수평 발사 한 다음 공이 움직인 수직, 수평 거리를 측정하여 구할 수 있다. 그 다음, 이 초기 속도를 이용하여, 특정 각도로 공을 발사했을 때 공이 착륙할 지점을 계산해낼 수 있다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

수평□초기□속도□

초기 속도 v_0 은 탁자에서 수평으로 발사된 공이 움직인 수평 거리 $x=v_0t$ 로 계산할 수 있다. 이 때, t 는 공이 공중에 머문 시간을 가리킨다. 공기 저항은 무시할 수 있다고 가정한다.

공이 t 시간 동안 떨어진 수직 거리 y 는,

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \text{ 이다.}$$

공의 초기 속도는 x 와 y 를 측정하여 구할 수 있으며, 공의 비행 시간은 다음 식을

이용하여 계산한다.

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

그 다음, 다음 식으로 초기 속도를 구한다.

$$v_0 = \frac{x}{t}$$

특정 각도에서의 초기 속도:

수평면에 대해 각도 θ 에서 초기 속도로 발사한 공의 사정 거리 x 를 예상하려면, 먼저 수직 운동 방정식을 이용하여 비행 시간을 계산해야 한다.

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2}gt^2$$

여기에서, y_0 는 공의 초기 높이, y 는 공이 바닥에 부딪힐 때의 위치이다. 그 다음 식 $x = v_0 \cos\theta t$ 를 이용하여 사정 거리를 구한다.

준 비

- ① 포물체 발사 장치를 튼튼한 탁자 한 쪽 끝에 클램프로 고정한다.
- ② 공이 수평으로 발사되도록 발사 장치의 각도를 0으로 조정한다.

파트 A: 공의 초기 속도 구하기

- ① 포물체 발사 장치에 플라스틱 공을 넣고 장거리 위치에 맞춘다. 공을 하나 발사하여 공이 바닥에 떨어지는 위치를 확인하고, 그 지점에 흰 종이를 테이프로 붙여둔다. 그 다음 이 종이 위에 카본지 한 장을 (카본 면이 아래로 가도록) 놓고 테이프로 붙인다. 이렇게 하면 공이 바닥에 부딪혔을 때 흰 종이에 자국이 남게 된다.
- ② 10발 정도를 발사한다.
- ③ 공이 포신을 떠날 때 공의 아래면 (이 위치는 포신 측면에 표시되어 있음) 에서 바닥까지의 수직 거리를 측정한다. 이 거리를 표 1.1에 기록한다.
- ④ 측정추를 이용하여, 포신의 발사 지점 바로 아래에 있는 바닥 위 지점을 찾는다. 포신 발사 지점부터 종이의 앞 가장자리까지, 바닥을 따라 수평 거리를 측정하고 그 결과를 표 1.1에 기록한다.
- ⑤ 종이의 앞 가장자리부터 10개 점까지의 거리를 각각 측정하여, 그 결과를 표 1.1에 기록한다.
- ⑥ 이 10개 거리 결과값의 평균을 내어 표 1.1에 기록한다.
- ⑦ 수직 거리와 평균 수평 거리를 이용하여, 공의 비행 시간과 초기 속도를 계산하고, 그 결과를 표 1.1에 기록한다.

파트 B: 특정 각도에서 발사한 공의 사정거리 예상하기

- ① 포물체 발사 장치 각도를 30-60도 사이로 조정하고, 그 각도를 표 1.2에 기록한다.
- ② 이 실험의 처음 부분에서 구한 초기 속도와 수직 거리를 이용하여, 위에서 선택한 새로운 각도로 공을 발사했다고 가정하고 그에 대한 새로운 비행 시간과 새로운 수평 거리를 계산한다. 그 결과를 표 1.2에 기록한다.
- ③ 하얀 종이 중앙을 가로질러 선을 그린 다음, 그 선이 포물체 발사 장치로부터의 예상 수평 거리에 오도록 놓고 바닥에 테이프로 붙인다. 그 다음 종이를 카본지로 덮는다.
- ④ 공을 10번 발사한다.
- ⑤ 거리를 측정하고 평균을 낸다. 그 결과를 표 1.2에 기록한다.

분 석

- ① 특정 각도로 공을 발사했을 때 그 거리에 대한 예상값과 결과로 얻은 평균값 사이의 백분율 차이를 계산하시오.
- ② 사정 거리 예상값의 정확도를 평가하시오. 최종 10발 중 몇 발이 사정 거리 안에 떨어졌는가?

표 1.1 초기 속도 구하기

수직 거리 = _____ 종이 가장자리까지의 수평 거리= _____

비행 시간 계산값 = _____ 초기 속도 = _____

시도 번호	거 리
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
평균	
총 거리	

표 1.2 예상 사정 거리 확인

수직 거리 = _____ 종이 가장자리까지의 수평 거리= _____
비행 시간 계산값 = _____ 초기 속도 = _____

시도 번호	거리
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
평균	
총 거리	

실험 2: 포토게이트를 이용한 포물체 운동

필요 기구:

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 - 포토게이트 헤드 (2) - 측정 추 - 카본지 | <ul style="list-style-type: none"> - 포토게이트 설치용 까치발 - 컴퓨터 - 미터 막대 - 흰 종이 |
|--|---|

목 적

이 실험은 특정 각도로 발사한 공의 사정 거리를 예상하고 검증한다. 포토게이트는 공의 초기 속도를 구하는데 사용한다.

이 론

공을 수평면 위에서 특정 각도로 탁자 밖으로 발사했을 때, 그 착륙 지점을 예상하려면, 먼저 공의 초기 속도 (포구 속도)를 구해야 한다. 이 속도는, 공을 발사한 다음 포토게이트를 이용하여 그 속도를 측정하여 구할 수 있다. 수평 위 각도 q 에서 초기 속도로 발사한 공의 사정 거리 x 를 예상하려면, 먼저 수직 운동 방정식을 이용하여 비행 시간을 구해야 한다.

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2}gt^2$$

여기에서, y_0 는 공의 초기 고도, y 는 공이 바닥에 부딪힐 때의 위치이다. 그 다음 식 $x = v_0 \cos\theta t$ 를 이용하여 사정 거리를 구한다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 "반복 결과"를 참조한다.

준 비

- ① 포물체 발사 장치를 튼튼한 탁자 한 쪽 끝에 클램프로 고정한다.
- ② 포물체 발사 장치 각도를 30-60도 사이로 조정한다.
- ③ 발사 장치에 포토게이트 까치발을 연결하고, 그 까치발에 포토게이트 두 개를 장착한 다음, 포토게이트를 컴퓨터나 기타 타이머에 연결한다.

순 서

파트 A : 공의 초기 속도 구하기

- ① 포물체 발사 장치에 플라스틱 공을 넣고 장거리 위치에 맞춘다.
- ② 타이밍 프로그램을 실행시키고, 공이 두 개의 포토게이트를 막는 시점 사이의 시간을 측정하도록 설정한다.
- ③ 공을 세 번 발사하여 이 시간들의 평균을 구한 다음, 그 결과를 표 2.1에 기록한다.
- ④ 두 포토게이트 사이의 간격이 10cm라는 점을 이용하여 초기 속도를 계산하고, 그 결과를 표 2.1에 기록한다.

표 2.1 초기 속도

시도 번호	시 간
1	
2	
3	
평균	
총 거리	

파트 B : 특정 각도에서 발사한 공의 사정거리 예상하기

- ① 포물체 발사 장치의 각도를 선택한 각도 그대로 유지한다.
- ② 공이 포신을 떠날 때 공의 아래면 (이 위치는 포신 측면에 표시되어 있음) 에서 바닥까지의 수직 거리를 측정하고, 그 값을 표 2.2에 기록한다.
- ③ 앞에서 구한 초기 속도와 수직 거리를 이용하여, 위에서 선택한 각도로 공을 발사했다고 가정하고 그에 대한 비행 시간과 수평 거리를 계산한다. 그 결과를 표 2.2에 기록한다.
- ④ 하얀 종이 중앙을 가로질러 선을 그린 다음, 그 선이 포물체 발사 장치로부터의 예상 수평 거리에 오도록 놓고, 바닥에 테이프로 붙인다. 그 다음 종이를 카본지로 덮는다.
- ⑤ 공을 10번 발사한다.
- ⑥ 10번 거리를 측정하고 평균을 낸다. 그 결과를 표 2.2에 기록한다.

분 석

- ① 특정 각도로 공을 발사했을 때 그 거리에 대한 예상값과 결과로 얻은 평균값 사이의 백분율 차이를 계산하시오.
- ② 사정 거리 예상값의 정확도를 평가하시오. 최종 10발 중 몇 발이 사정 거리 안에 떨어졌는가?

표 2.2 예상 사정 거리 확인

수평면에 대한 각도= _____

종이 가장자리까지의 수평 거리= _____

비행 시간 계산값 = _____

예상 사정 거리 = _____

시도 번호	거 리
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
평균	
총 거리	

실험 3: 포물체 사정거리 vs. 각도

필요 기구:

- | | |
|------------------------|--------|
| - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 | - 측정 추 |
| - 줄자나 미터 막대 | - 카본지 |
| - 높이를 포구 높이에 맞추기 위한 상자 | - 흰 종이 |
| - 그래프 종이 | |

목 적

이 실험에서는 공의 사정거리가 공이 발사된 각도와 어떤 관계를 갖는지 알아본다. 다음 두 경우에서 가장 먼 사정 거리를 갖는 각도를 구한다: 평평한 지면에서 발사할 경우, 탁자에서 발사할 경우

이 론

사정 거리는 발사 장치의 포구와 공이 부딪히는 지점 사이의 수평 거리 x 이며, 이 값은 식

$x = (v_0 \cos \theta) t$ 로 구한다. 여기에서, v_0 은 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도, θ 은 수평면에 대한 경사도, t 는 비행 시간을 의미한다. (그림 3.1 참조)

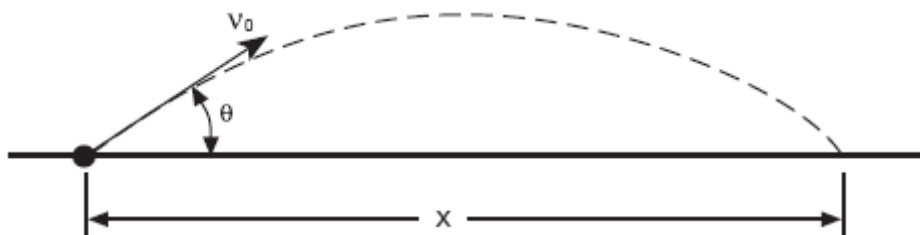


그림 3.1 높이가 같은 표면에서 발사할 경우

공이 발사 장치의 포구와 같은 높이의 지점에 떨어질 경우, 공의 비행시간은 공이 그 궤도의 최고 지점에 도달하는데 걸리는 시간의 두 배가 된다. 최고 지점에서 운동에너지는 0이므로,

$$v_y = 0 = v_0 \sin \theta - g t_{peak}$$

따라서, 시간을 구하면 총 비행 시간은 다음과 같다.

$$t = 2t_{peak} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

공을 탁자에서 바닥 쪽으로 발사했을 경우(그림 3.2 참조)에는, 수직 운동 방정식을 이용하여 비행 시간을 구한다.

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

여기에서, y_0 는 공의 초기 고도, y 는 공이 바닥에 부딪힐 때의 위치이다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

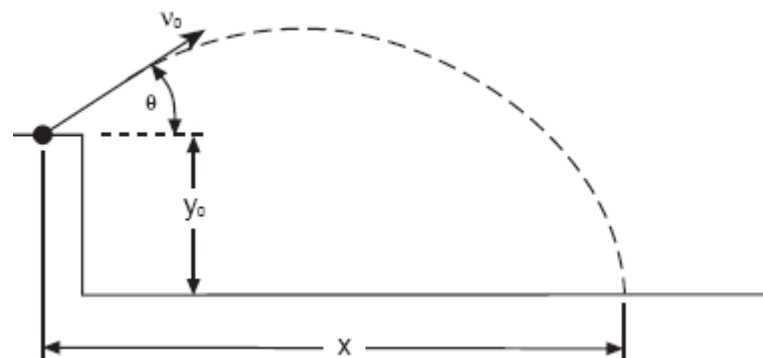


그림 3.2 탁자에서 발사할 경우

준 비

- ① 튼튼한 탁자의 한 쪽 끝에 포물체 발사 장치를 클램프로 고정 한 다음, 공이 탁자 위에 떨어지도록 발사 장치를 조준한다.
- ② 포물체 발사 장치 각도를 10도로 조정한다.
- ③ 포물체 발사 장치에 플라스틱 공을 넣고 중거리 또는 장거리 위치에 맞춘다.

▶ 주의: 단거리 설정의 경우 각도에 따라 포구 속도가 더 쉽게 변화하기 때문에, 일반적으로 이 실험이 잘 되지 않는다.

공을 발사하여 떨어지는 지점을 확인하고, 해당 지점에 상자를 놓아 공이 발사 장치의 포구와 같은 높이에 떨어지도록 한다. (그림 3.3)

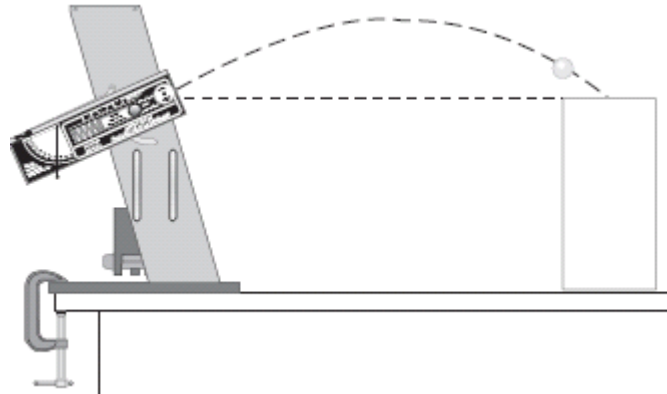


그림 3.3 높이가 같은 표면으로 발사 준비

순 서

높이가 같은 표면에서 발사

- ① 공 하나를 발사하여 공이 상자에 부딪히는 지점을 확인한다. 상자 위 해당 위치에 테이프로 흰 종이를 붙인다. 그 다음 이 종이 위에 카본지 한 장을 (카본 면이 아래로 가도록) 놓고 테이프로 붙인다. 이렇게 하면 공이 바닥에 부딪혔을 때 흰 종이에 자국이 남게 된다.
- ② 5발 정도를 발사한다.
- ③ 줄자를 이용하여 포구에서 종이 가장자리까지의 수평 거리를 측정한다. 줄자가 없을 경우에는, 측정추를 이용하여 포신의 발사 지점 바로 아래에 있는 탁자 위 지점을 찾은 다음, 탁자 위를 따라 이 지점에서부터 종이 가장자리까지의 수평 거리를 측정한다. 그 결과를 표 3.1에 기록한다.
- ④ 종이 앞면 가장자리부터 5개 점까지의 거리를 각각 측정하여, 그 결과를 표 3.1에 기록한다.
- ⑤ 각도를 10도 크게 하여 위 과정을 반복한다.
- ⑥ 10도 단위로 80도까지 각도를 계속 올리면서 과정을 반복한다.

표 3.1 높이가 같은 표면에서의 발사

수평 거리	각도	10	20	30	40	50	60	70	80
	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	평균								
	종이거리								
	총 거리								

탁자에서 발사

공이 바닥에 떨어지도록 포물체 발사 장치를 조준한다. 위 과정을 반복하고 그 결과를 표 3.2에 기록한다.

표 3.2 탁자에서 바닥으로 발사

수평 거리	각도	10	20	30	40	50	60	70	80
	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	평균								
	종이거리								
	총 거리								

분 석

- ① 각 경우의 다섯 개 거리 값의 평균을 구하고, 표 3.1과 3.2에 기록한다.
- ② 종이 앞쪽 가장자리까지의 거리에 평균 거리를 더해, 각 경우의 총 거리 (사정 거리)를 구한 다음, 표 3.1과 3.2에 기록한다.
- ③ 각 데이터 표를, 범위 vs. 각도로 작도하고 각 점을 따라 완만한 곡선을 그린다.

문 제

- ① 그래프 상에서, 각 경우 최대 사정 거리를 갖는 각도는 얼마인가?
- ② 탁자에서 발사한 경우, 최대 사정 거리를 갖는 각이 더 큰가, 작은가?
- ③ 최대 사정 거리가 더 큰 것은, 공을 탁자에서 발사했을 때인가? 아니면 높이가 같은 표면에서 발사했을 때인가?

실험 4: 포물체 경로

필요 기구:

- | | |
|------------------------------------|-------------|
| - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 | - 줄자나 미터 막대 |
| - 카본지 | - 흰 종이 |
| - 그래프 종이 | |
| - 이동형 수직 표적판 (바닥에서 포구까지 닿는 높이여야 함) | |

목 적

이 실험에서는 공을 탁자에서 수평으로 발사했을 때, 공이 이동하는 수평 거리와 공이 떨어지는 수직 거리 간의 관계를 알아본다.

이 론

사정 거리는 발사 장치의 포구와 공이 부딪히는 지점 사이의 수평 거리 x 이며, 이 값은 식

$x = (v_0 \cos \theta) t$ 로 구한다. 여기에서, v_0 은 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도, θ 은 수평면에 대한 경사도, t 는 비행 시간을 의미한다.

공이 수평으로 발사되었을 경우, 공의 비행 시간은 다음과 같다.

$$t = \frac{x}{v_0}$$

공이 t 시간 내에 떨어지는 수직 거리 y 는,

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{이고, 이 때 } g \text{는 중력에 의한 가속도이다.}$$

t 를 위 식에 대입하여 y 를 구하면,

$$y = \left(\frac{g}{2v_0^2} \right) x^2$$

y와 x^2 의 그래프를 그리면, 기울기 $\frac{g}{2v_0^2}$ 의 직선이 된다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

준 비

- ① 튼튼한 탁자의 끝 부분에 포물체 발사 장치를 클램프로 고정하고, 발사 장치를 탁자 바깥 쪽으로 조준한다.
- ② 공이 수평으로 발사되도록 포물체 발사 장치의 각도를 0에 맞춘다.
- ③ 중거리로 시험 발사하여 수직 표적의 초기 위치를 구하고, 공이 표적의 아래 부분을 맞추도록 표적을 놓는다. (그림 4.1)
- ④ 표적판을 흰 종이로 덮은 다음, 그 위에 카본지를 붙인다.

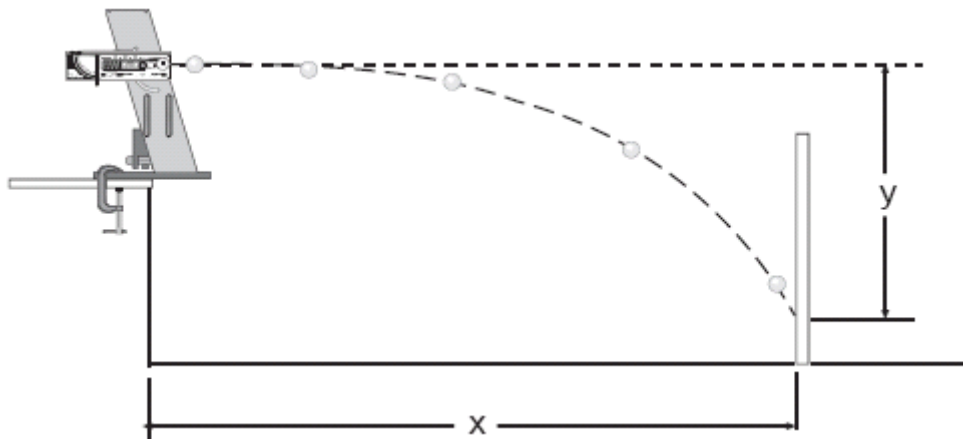


그림 4.1 준비

순 서

- ① 바닥에서 포구까지의 수직 높이를 측정하여 표 4.1에 기록하고, 이 높이를 표적 위에 표시한다.
- ② 포물체 발사 장치의 포구에서 표적판까지의 수평 거리를 측정하고 이를 표 4.1에 기록한다.
- ③ 공을 발사한다.
- ④ 표적을 발사 장치 쪽으로 10-20cm정도 옮긴다.
- ⑤ 공이 표적을 맞출 때 포구 높이보다 10-20cm 낮은 지점을 맞출 때까지, 순서 2-4를 반복한다.

표 4.1 데이터

포구 높0| = _____

수평 거리(x)	높이(y)	x^2

분 석

- ① 표적판에서, 포구 높이를 표시한 곳부터 공이 맞힌 지점을 표시한 곳까지의 수직 거리를 측정하고 그 결과를 표 4.1에 기록한다.
- ② 모든 데이터에 대한 x^2 값을 계산하고, 표 4.1에 기록한다.
- ③ y vs. x^2 를 작도하고, 가장 잘 맞는 일직선을 그린다.
- ④ 그래프의 기울기를 계산하고 그 결과를 표 4.2에 기록한다.
- ⑤ 그래프의 기울기로부터, 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도를 계산하고 표 4.2에 기록한다.
- ⑥ x , y 점 중 하나를 골라, y 값을 이용해 시간을 구한 다음 x 값을 이용해 초기 속도를 계산한다. 그 결과를 표 4.2에 기록한다.
- ⑦ 이 두 가지 방식으로 얻은 초기 속도 간의 백분율 차이를 계산하고, 표 4.2에 기록한다.

표 4.2 초기 속도

그래프 기울기	
기울기로 구한 초기 속도	
비행 시간	
x, y로 구한 초기 속도	
백분율 차이	

문 제

- ① 선이 일직선인가? 이를 통해 y의 x의 관계에 대해 무엇을 알 수 있는가?
- ② y vs. x를 작도하면, y vs. x^2 를 작도했을 때와 비교해 그래프가 어떻게 달라지는가?
- ③ 포물체의 경로는 어떤 모양인가?

실 험 5: 에너지 보존

필요 기구:

- | | |
|---------------------------------------|--------|
| - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 | - 측정추 |
| - 줄자나 미터 막대 | - 흰 종이 |
| - 카본지 | |
| - (선택 사항) 포토게이트 헤드 2개와, 포토게이트 설치용 까치발 | |

목 적

이 실험에서는 수직으로 쏘아 올린 공의 운동에너지가 위치 에너지로 변환되는 것을 보여준다.

이 론

공의 총 역학적에너지는, 그 위치에너지(PE)와 운동에너지(KE)의 합이다. 마찰이 없을 경우, 총 에너지는 보존된다. 공을 수직으로 쏘아 올리면, 초기 PE는 0이며, KE는 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 이다. 여기에서, m 은 공의 질량, v_0 는 공의 포구 속도이다 (그림 5.1). 공이 최대 높이 h 에 도달하면, KE는 0, $PE = mgh$ 가 되고, 여기에서 g 는 중력에 의한 가속도를 의미한다. 에너지 보존 법칙에 의해 초기 KE는 최종 PE와 동일하다.

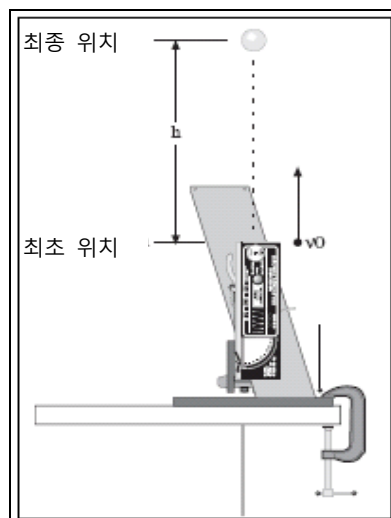


그림 5.1 에너지 보존

운동에너지를 계산하려면, 초기 속도를 구해야 한다. 탁자 위에서 공을 수평으로 발사했을 때, 초기 속도 v_0 를 구하기 위해서는, $x = v_0 t$ 으로 공이 움직인 수평 거리를 구한다. 이 식에서 t 는 공이 공중에 머무른 시간을 의미한다. 공기 저항은 무시할 수 있다고 가정한다. (그림 5.2)

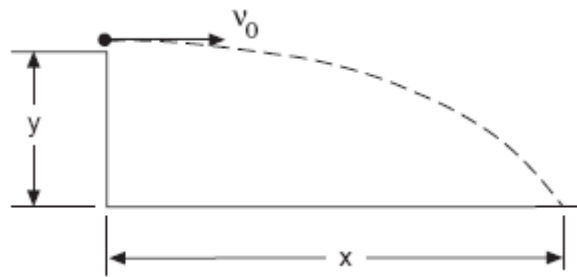


그림 5.2 초기 속도 구하기

t 시간 동안 공이 떨어지는 수직 거리는 $y = \frac{1}{2}gt^2$ 로 구할 수 있다.

공의 초기 속도는 x 와 y 를 측정하여 구할 수 있다.

공의 비행 시간은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

그 다음 $v_0 = \frac{x}{t}$ 을 이용하여 초기 속도를 구할 수 있다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

준 비

- ① 튼튼한 탁자의 끝 부분에 포물체 발사 장치를 클램프로 고정하고, 발사 장치를 탁자 바깥 쪽으로 조준한다. (그림 5.1)
- ② 발사 장치를 똑바로 위로 향하게 한 후, 중거리로 시험 발사하여 공이 천장에 부딪히지 않는지 확인한다. 천장에 부딪힐 경우, 단거리를 사용하거나, 발사 장치를 바닥에 더 가까이 놓는다.
- ③ 공이 수평으로 발사되도록 포물체 발사 장치의 각도를 0에 맞춘다.

순 서

1부(포토게이트 없이)공의 초기속도 구하기

- ① 포물체 발사 장치에 플라스틱 공을 놓고, 중거리 위치에 맞춘다. 한 발을 발사하여 공이 바닥에 떨어지는 지점을 확인하고, 그 지점에 흰 종이를 테이프로 붙인다. 그 다음 카본지 한 장을 (카본 면이 아래로 가도록) 흰 종이 위에 놓고 테이프로 붙인다. 이렇게 하면 공이 바닥에 부딪혔을 때 흰 종이에 자국이 남게 된다.
- ② 10발 정도를 발사한다.
- ③ 공이 포신을 떠날 때 공의 아래면 (이 위치는 포신 측면에 표시되어 있음) 에서 바닥까지의 수직 거리를 측정한다. 이 거리를 표 5.1에 기록한다.
- ④ 측정추를 이용하여, 포신의 발사 지점 바로 아래에 있는 바닥 위 지점을 찾는다. 포신 발사 지점부터 종이의 앞 가장자리까지, 바닥을 따라 수평 거리를 측정하고 그 결과를 표 5.1에 기록한다.
- ⑤ 종이의 앞 가장자리부터 10개 점까지의 거리를 각각 측정하여, 그 결과를 표 5.1에 기록한다.
- ⑥ 이 10개 거리 결과값의 평균을 내어 표 5.1에 기록한다.
- ⑦ 수직 거리와 평균 수평 거리를 이용하여, 공의 비행 시간과 초기 속도를 계산하고, 그 결과를 표 5.1에 기록한다.

(포토게이트를 이용하여) 공의 초기 속도를 구하는
또 다른 방법

- ① 발사 장치에 포토게이트 까치발을 연결하고, 그 까치발에 포토게이트 두 개를 장착한 다음, 포토게이트를 컴퓨터나 기타 타이머에 연결한다.
- ② 포물체 발사 장치의 각도를 90도 (수직)에 맞춘다.
- ③ 포물체 발사 장치에 플라스틱 공을 넣고 장거리 위치에 맞춘다.
- ④ 타이밍 프로그램을 실행시키고, 공이 두 개의 포토게이트를 막는 시점 사이의 시간을 측정하도록 설정한다.
- ⑤ 공을 세 번 발사하여 이 시간들의 평균을 구한 다음, 그 결과를 표 5.2에 기록한다.
- ⑥ 두 포토게이트 사이의 간격이 10cm라고 가정하여 초기 속도를 계산하고, 그 결과를 표 5.2에 기록한다.

표 5.1 포토게이트 없이 초기 속도 구하기

수직 거리 = _____ 종이 가장자리까지의 수평 거리 = _____
 비행 시간 계산값 = _____ 초기 속도 = _____

시도 번호	거리
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
평균	
총 거리	

표 5.2 포토게이트를 이용한 초기 속도

시도 번호	시간
1	
2	
3	
평균 시간	
초기 속도	

높이 측정

- ① 발사 장치 각도를 90도 (수직)에 맞춘다.

- ② 중거리 설정에서 공을 몇 번 발사하여 공이 도달한 최대 높이를 측정하고, 그 결과를 표 5.3에 기록한다.
- ③ 공의 질량을 구하고 표 5.3에 기록한다.

분 석

- ① 최초 운동에너지를 계산하고 표 5.3에 기록한다.
- ② 최종 위치에너지를 계산하고 표 5.3에 기록한다.
- ③ 최초 에너지와 최종 에너지 사이의 백분율 차이를 계산하고, 표 5.3에 기록한다.

표 5.3 결과

공의 최대 높이	
공의 질량	
최초 운동 에너지	
최종 위치 에너지	
백분율 차이	

문 제

- ① 마찰은 운동에너지 결과에 어떤 영향을 미치는가?
- ② 마찰은 위치에너지 결과에 어떤 영향을 미치는가?

실험 6 : 2차원에서의 운동량 보존

필요 기구:

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 2개 - 미터 막대 - 싸고 튼튼한 종이 - 공을 고정시킬 받침대 | <ul style="list-style-type: none"> - 측정추 - 각도기 - 충돌을 비탄성화 할 테이프 - 카본지 |
|---|---|

목 적

이 실험에서는 탄성 및 비탄성충돌 시, 운동량이 2차원에 보존됨을 보여준다.

이 론

멈춰 있는 공에 다른 공을 발사하면, 두 공이 충돌하며 서로 다른 방향을 향해 움직이게 된다. 두 공 모두 중력의 영향으로 바닥에 떨어지므로, 수직 방향으로 운동량이 보존되지 않는다. 그러나, 수평면상에서 공에 가해지는 알짜힘은 존재하지 않기 때문에, 수평면상으로는 운동량이 보존된다.

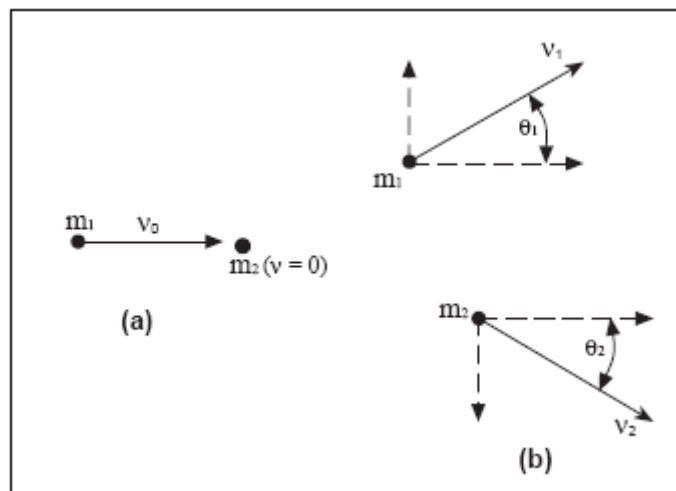


그림 6.1: (a) 충돌 전, (b) 충돌 후

첫 번째 공의 경우, 충돌 전에는 모든 운동량이 속도 방향에 있으므로, x 축을 이

방향으로 정하는 것이 편하다. 그 다음 충돌 직전의 운동량은,

$$\vec{P}_{before} = m_1 v_0 \hat{x} \text{ 이고, 충돌 후의 운동량은,}$$

$$\vec{P}_{after} = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) \hat{x} + (m_1 v_{1y} - m_2 v_{2y}) \hat{y} \text{ 이다.}$$

여기에서, $v_{1x} = v_1 \cos\theta_1$, $v_{1y} = v_1 \sin\theta_1$, $v_{2x} = v_2 \cos\theta_2$, $v_{2y} = v_2 \sin\theta_2$ 이다.

충돌 전 y 방향으로 알짜 운동량이 존재하지 않으므로, 운동량 보존을 위해서는 충돌 후 y 방향에 운동량이 존재해서는 안 된다.

따라서,

$$m_1 v_{1y} = m_2 v_{2y}$$

충돌 전 x 방향의 운동량이, 충돌 후 x 방향의 운동량과 같다고 하면,

$$m_1 v_0 = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

비탄성충돌에서는, 운동량뿐 아니라 에너지도 보존 된다.

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

또한, 에너지가 보존되면, 충돌 후 (같은 질량의) 두 공의 경로는 서로에 대해 직각이 된다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

준 비

- ① 튼튼한 탁자의 끝 부분에 포물체 발사 장치를 클램프로 고정하고, 발사 장치를 탁자 안 쪽으로 조준한다.
- ② 공이 수평으로 발사되도록 포물체 발사 장치의 각도를 0에 맞춘다. 단거리로 시험 발사하여 공이 탁자 위에 떨어지는지 확인한다.
- ③ 탁자를 싸고 튼튼한 종으로 덮는다. 종이는 발사 장치 받침대까지 닿아야 한다.
- ④ 충돌 장치를 발사 장치에 장착한다. (그림 6.2) T자형 장치가 포구 앞쪽으로 3cm 정도 나올 때까지 충돌 장치를 뒤쪽으로 밀어낸다.
- ⑤ 충돌 장치를 회전시켜 공을 나란히 놓는다. T자형 부분의 위치를 정할 때는, 공이 다시 발사 장치 안으로 튀어 들어가지 않고 두 개 모두 탁자에 떨어지는 위치를 찾는다. 나사로 충돌 장치를 발사 장치에 고정시킨다.

- ⑥ T자형 부분의 높이를 조절하여, 공 두 개의 높이가 같아지도록 한다. 이 과정은 두 공의 비행 시간을 같게 하기 위해 꼭 필요하다. 시험 발사를 통해, 두 공이 동시에 탁자에 부딪히는지 확인한다.
- ⑦ 공이 떨어지는 지점 세 곳에 각각 카본지를 놓아둔다.

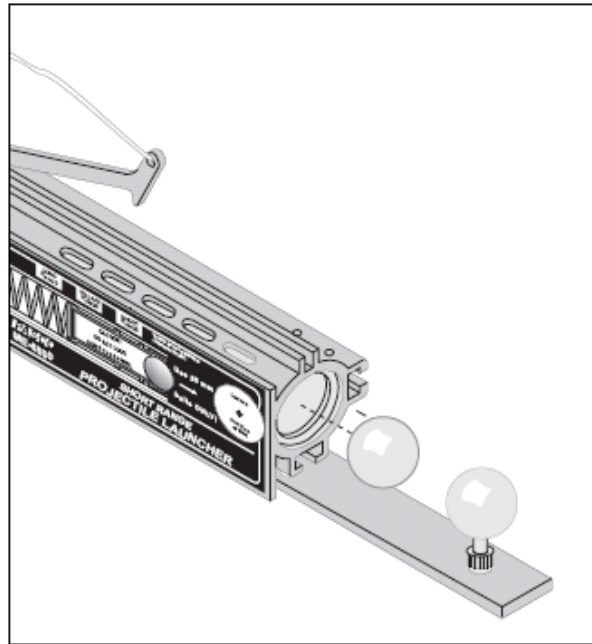


그림 6.2: 포토게이트 까치발과 T자형 장치

순 서

- ① 공 하나를 똑바로 다섯 번 발사한다.
- ② 탄성충돌: 공 두 개를 사용하여, 하나는 장전하고, 다른 하나는 T자형 장치에 놓는다. 공을 다섯 번 발사한다.
- ③ 비탄성충돌: 공 두 개를 사용하여, 하나는 장전하고, T자형 장치에 놓은 공에는 테이프로 아주 작은 고리를 만들어 붙인다. T자형 장치 공의 테이프 부분이 발사된 공에 붙도록 조준하여, 비탄성충돌을 유발시킨다. 공을 한 번 발사하여 공이 카본지에 맞는지 확인하고, 맞지 않으면 카본지의 위치를 옮겨 다시 한 번 발사한다. 테이프를 사용하여 매번 같은 비탄성충돌을 만들 수 없으므로, 이 한 번의 충돌만 기록하면 된다.
- ④ 측정추를 이용하여 종이 위에 두 공이 닿는 지점을 확인하고, 해당 지점을 표시한다.

분 석

- ① 공이 닿은 지점으로부터 점들이 모여있는 중앙까지 선을 긋는다. 선은 총 다섯 개가 된다.
- ② 다섯 개 선 모두 길이를 측정하고, 답안에 기록한다. 모든 경로에서의 비행 시간이 동일하므로, 이 길이는 해당 수평 속도에 비례한다. 또한 질량이 모두 같으므로, 이 길이는 각 공의 해당 운동량에도 비례한다.
- ③ 중앙선에서 외곽의 네 개 선까지의 각도를 각각 측정하고, 답안에 기록한다.

탄성충돌에 대해 다음 세 단계를 수행한다.

그 다음, 비탄성충돌에 대해 이 세 단계를 반복한다.

- ④ x 방향에서는, 충돌 전 운동량이 충돌 후 운동량과 같음을 확인한다. 이를 위해서는, 길이를 이용하여 운동량을 구하고, 각도를 이용하여 x 값을 계산한다. 그 결과를 표 6.1과 6.2에 기록한다.

표 6.1 탄성충돌 결과

초기 x 운동량		최종 x 운동량		% 차이	
y 운동량 공1		y 운동량 공2		% 차이	
초기 KE		최종 KE		% 차이	

표 6.2 비탄성충돌 결과

초기 x 운동량		최종 x 운동량		% 차이	
y 운동량 공1		y 운동량 공2		% 차이	
초기 KE		최종 KE		% 차이	

- ⑤ y 방향에서는, 두 공의 운동량이 같고 방향이 반대여서, 서로 상쇄됨을 확인한다. 이를 위해서는 각도를 이용하여 y 값을 계산한다. 결과를 표에 기록한다.
- ⑥ 충돌 전과 충돌 후의 총 운동에너지를 계산하고, 백분율 차이를 계산하여 표에 기록한다.

문 제

- ① 각 충돌 형태에서, x 방향에 운동량이 보존되는가?
- ② 각 충돌 형태에서, y 방향에 운동량이 보존되는가?
- ③ 탄성충돌에서 에너지가 보존되는가?
- ④ 비탄성충돌에서 에너지가 보존되는가?
- ⑤ 탄성충돌에서, 충돌 후 두 공의 경로 사이의 각도는 예상대로 90도인가?
- ⑥ 비탄성충돌에서, 충돌 후 두 공의 경로 사이의 각도는 얼마인가? 왜 90도 보다 작은가?

실험 7 : 벽에 맞는 높이가 최대인 각도 찾기

필요 기구:

- | | |
|---------------------|------------|
| - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 | - 측정추 |
| - 줄자나 미터 막대 | - 카본지 |
| - 흰 종이 | - 벽 보호용 판자 |

목 적

이 실험에서는 벽으로부터 고정된 수평 거리에서 공을 발사했을 때, 수직 벽에 맞는 높이를 최대화하는 발사 각도를 알아본다.

이 론

수직 벽에서 고정된 거리 x 만큼 떨어진 지점에서 특정 각도로 공을 발사했을 때, 공이 벽에 부딪히는 높이 y 는 다음 식을 통해 구할 수 있다.

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

여기에서, y_0 은 공의 최초 높이, v_0 은 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도, θ 은 수평면에 대한 경사각, g 는 중력에 의한 가속도, t 는 비행 시간이다. 사정 거리는 발사 장치의 포구와 공이 부딪히는 지점 사이의 수평 거리 x 이며, 이 값은 식 $x = (v_0 \cos \theta) t$ 로 구한다. x 방정식으로 비행 시간 t 를 구하면,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \text{가 된다.}$$

y 에 대한 방정식에 이 t 를 대입하면,

$$y = y_0 + x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

최대 속도 y 를 갖는 각도를 구하기 위해, $dy/d\theta$ 를 0으로 놓고, 각도를 계산한다.

$$\frac{dy}{d\theta} = x \sec^2 \theta - \frac{gx^2 \tan \theta \sec^2 \theta}{v_0^2} = 0$$

각도를 구하면,

$$\tan \theta_{\max} = \frac{v_0^2}{gx}$$

이 된다.

두 번째 도함수가 θ_{\max} 에 대해 음이므로, 각도는 최대가 된다.

공의 초기 속도는, 고정 거리 x 와 최대 높이 y_{\max} 를 사용하여 구할 수 있다. y 에 대한 방정식으로 v_0 을 구하고, 구한 값을 y_{\max} , θ_{\max} , x 에 넣는다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 "반복 결과"를 참조한다.

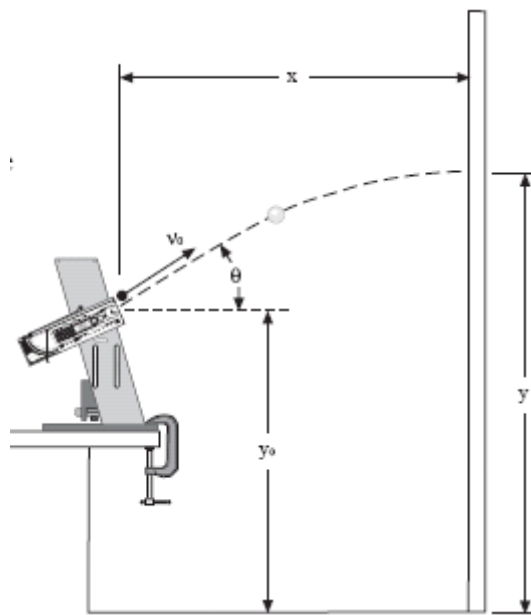


그림 7.1 높이 최대화

준 비

- ① 포물체 발사 장치가 벽을 향하도록 하여 튼튼한 탁자의 끝 부분에 클램프로 고정한다. 벽으로부터의 거리는 약 2m가 되도록 한다 .
- ② 벽을 보호하기 위해 수직 판자를 세워둔다.
- ③ (장거리 설정으로) 수 차례 시험 발사하여, 대략 어떤 각도일 때 벽에 맞는 높이가 최대가 되는지 알아본다. (주의: 단거리 설정의 경우 각도에 따라 포구 속도가 더

쉽게 변화하기 때문에, 일반적으로 이 실험이 잘 되지 않는다.)

- ④ 판자 위의 공이 맞는 지점에 흰 종이를 붙이고, 그 위에 카본지를 덮는다.

순 서

- ① 공을 다양한 각도로 발사한 다음 종이 위에 표시된 지점을 확인하여, 정확히 어느 각에서 벽에 맞는 높이가 최대가 되는지 알아본다.
- ② 최대 높이를 갖는 각도를 측정하여 표 7.1에 기록한다.
- ③ 최대 높이를 측정하여, 표 7.1에 기록한다.
- ④ 포구에서 수직 판자까지의 수평 거리를 측정하여, 표 7.1에 기록한다.
- ⑤ 공이 포구를 떠나는 지점에서의 초기 높이를 측정하여, 표 7.1에 기록한다.

표 7.1 데이터 및 결과

최대 높이를 갖는 각도 측정값	
최대 높이	
수평 거리	
초기 높이	
초기 속도 계산값	
최대 높이를 갖는 각도 계산값	
각도 값 간의 백분율 차이	

분 석

- ① v_0 에 대한 y 방정식을 풀고 표 7.1의 데이터 값을 대입하여, 초기 속도를 계산하십시오.
- ② 위에서 계산한 초기 속도와 벽에서 발사 장치까지의 수평 거리를 이용하여 최대 높이를 갖는 각도를 계산하십시오.
- ③ 측정 각도와 계산 각도 사이의 백분율 차이를 계산하십시오.

문 제

- ① 최대 높이를 갖는 각도에서, 공이 벽에 부딪힐 때, 공은 이미 궤도의 최고점에 도달한 상태인가?
- ② 45° 에서 그 높이가 최대가 되는 벽까지의 거리는 얼마인가? 이 경우 최대 높이는 얼마인가?

실험 8 : 포물체 속도 근사법

필요 기구:

- | | |
|---------|--------|
| - 발사 장치 | - 강철 공 |
| - C 클램프 | - 저울 추 |
| - 줄 | |

목 적

이 실험에서는 진자에 공을 발사한 다음 진자가 흔들리는 각도를 관찰하여, 포물체 발사장치의 포구 속도를 구한다.

본 매뉴얼 전반에서 이미 설명한 바와 같이, 공의 속도를 구하는 대략적인 식은 다음과 같다.

$$v_b = \frac{M}{m} \sqrt{2gR_{cm}(1 - \cos\theta)}$$

여기에서 M은 진자와 공의 질량을 합한 값, m은 공의 질량, g는 중력 가속도, R_{cm} 은 피봇에서 진자의 질량 중심까지의 거리, θ 은 진자가 도달하는 각도이다.

준 비

- ① 공을 잡는 장치와 같은 높이의 탄동 진자 받침대에 포물체 발사 장치를 연결한다.
- ② 진자 받침대를 클램프로 탁자 위에 고정시킨다. 이 때, 클램프가 진자의 진동을 방해하지 않도록 주의한다. (공을 발사할 때 받침대가 탁자에 단단히 고정되어 있으면, 클램프로 따로 고정하지 않아도 매우 정확한 결과를 얻을 수 있다.)

순 서

- ① 진자를 90°각도에 고정시켜 방해가 되지 않도록 한 다음, 포물체 발사 장치를 장전한다. 진자를 다시 내려 놓고, 각도 표시를 0도로 옮긴다.
- ② 발사 장치를 발사하고, 도달한 각도를 기록한다. 낮은 각도나 높은 각도로 실험을 하고자 할 경우, 진자에 추를 더하거나 빼면 된다. 진자 질량이 만족스러운 값이 될 때까지 이 테스트 측정을 반복한다.

- ③ 실험에 사용할 질량을 결정하고 난 다음에는, 나사를 풀고 피봇 축을 분리하여 받침대에서 진자를 분리한다. 저울추를 사용하여, 진자와 공을 합했을 때의 무게를 구한다. 이 값 M 을 표 8.1에 기록한다.
- ④ 공의 질량을 측정하고, 이를 m 으로 기록한다.
- ⑤ 줄에 매듭을 지어 진자를 건다. (그림 8.1) 공 잡는 장치에 공을 제자리에 고정 시키고, 매듭 내 진자의 위치를 조절하여 균형이 맞도록 한다. 피봇포인트에서 이 균형점까지의 거리를 측정하고 이를 R_{cm} 으로 기록한다. 자나 그 비슷한 물체의 가장자리 부분에서 진자의 균형을 맞추면 좀 더 쉽게 균형 점을 찾을 수 있다.

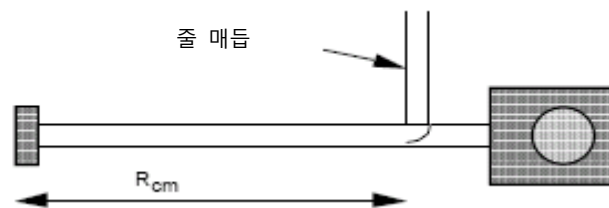


그림 8.1

- ⑥ 진자를 다시 받침대 위에 올려 놓고, 방향이 올바른지 확인한다. 각도 표시기가 진자 막대의 오른쪽에 있는지 반드시 확인한다.
- ⑦ 발사 장치를 충전한 다음, 각도 표시기를 2번 단계에서 얻은 각도보다 $1-2^\circ$ 작은 각도에 맞춘다. 진자가 표시기를 마지막 몇 도 정도만 움직이기 때문에, 이렇게 하면 표시기에 의해 진자가 느려지는 것을 거의 무시할 수 있다.
발사 장치를 발사하고, 진자가 도달한 각도를 표 8.1에 기록한다. 매번 진자가 도달한 이전 각도보다 $1-2^\circ$ 작은 각도로 각도 표시기를 설정하여 이 과정을 수 차례 반복한다.

계 산

- ① 진자가 도달한 평균 각도를 구하고, 표 8.1에 기록한다.
- ② 포물체 발사 장치의 포구 속도를 계산한다.

표 8.1

$M =$ _____

$m =$ _____

$R_{cm} =$ _____

θ_1	
θ_2	
θ_3	
θ_4	

평균 $\theta =$ _____

포구 속도 = _____

문 제

- ① 이렇게 구한 결과를 확인하는데 사용할 수 있는, 포구 속도 구하는 또 다른 방법이 있는가? 다른 방법을 사용하여 두 가지 결과를 비교하는 것이 필요할 수도 있다.
- ② 이 실험에서 오류를 발생시킬 수 있는 부분은 어떤 부분인가? 이러한 오류가 결과에 얼마나 영향을 미치는가?
- ③ 공과 진자가 충돌 할 때 운동에너지가 보존되면, 계산이 매우 간단해진다 (이론 부분 참조). 공과 진자의 충돌에서 운동에너지의 몇 퍼센트가 상실되는가? 이 충돌에서 에너지는 보존된다고 가정하는 것이 가능한가?
- ④ 공이 진자에 맞지 *않았을* 경우, 진자가 도달하는 각도는 어떻게 변화하는가? 공이 공 잡는 장치의 뒷부분에 맞도록 진자를 옆으로 돌려, 이 부분을 실험할 수 있다. 진자로 전달되는 에너지의 양은 더 큰가, 작은가?

실험 9 : 포물체 속도 정밀법

필요 기구:

- | | |
|-------------------|----------------------|
| - 포물체 발사 장치와 강철 공 | - C 클램프 (선택 사항) 강철 공 |
| - 저울 추 | - 줄 |
| - 자 | - 스톱워치 |

목 적

이 실험에서는 진자에 공을 발사한 다음 진자가 흔들리는 각도를 관찰하여, 포물체 발사장치의 포구 속도를 구한다.

본 매뉴얼 전반에서 이미 설명한 바와 같이, 공의 속도를 구하는 정확한 식은 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{mR_b} \sqrt{2IMgR_{cm}(1 - \cos\theta)}$$

여기에서 M은 진자와 공의 질량을 합한 값, m은 공의 질량, g는 중력 가속도, R_{cm} 은 피봇에서 진자의 질량 중심까지의 거리, R_b 는 피봇에서 공까지의 거리, θ 은 진자가 도달하는 각도, I는 공 잡는 장치 안의 공과 진자의 관성모멘트(moment of inertia)이다.

I 값은, 진자와 공의 작은 진동 주기를 측정하여 다음 식을 이용하면 구할 수 있다.

$$I = \frac{MgR_{cm}T^2}{4\pi^2}$$

여기에서, T는 주기이다.

준 비

- ① 공을 잡는 장치와 같은 높이의 탄동 진자 받침대에 포물체 발사 장치를 연결한다. 진자가 발사장치를 건드리지 않고 수직으로 떨어지는지 확인한다.
- ② 진자 받침대를 클램프로 탁자 위에 고정시킨다. 이 때, 클램프가 진자의 진동을 방해하지 않도록 주의한다. (공을 발사할 때 받침대가 탁자에 단단히 고정되어 있으면, 클램프로 따로 고정하지 않아도 매우 정확한 결과를 얻을 수 있다.)

순 서

- ① 진자를 90°각도에 고정시켜 방해가 되지 않도록 한 다음, 포물체 발사 장치를 장전한다. 진자를 다시 내려 놓고, 각도 표시를 0도로 옮긴다.
- ② 발사 장치를 발사하고, 도달한 각도를 기록한다. 낮은 각도나 높은 각도로 실험을 하고자 할 경우, 진자에 추를 더하거나 빼면 된다. 진자 질량이 만족스러운 값이 될 때까지 이 테스트 측정을 반복한다.
- ③ 실험에 사용할 질량을 결정하고 난 다음에는, 나사를 풀고 피봇 축을 분리하여 받침대에서 진자를 분리한다. 저울추를 사용하여, 진자와 공을 합했을 때의 무게를 구한다. 이 값 M 을 표 9.1에 기록한다.
- ④ 공의 질량을 측정하고, 이를 m 으로 기록한다.
- ⑤ 줄에 매듭을 지어 진자를 건다. (그림 9.1) 공 잡는 장치에 공을 제자리에 고정 시키고, 매듭 내 진자의 위치를 조절하여 균형이 맞도록 한다. 피봇포인트에서 이 균형점까지의 거리를 측정하고 이를 R_{cm} 으로 기록한다. 자나 그 비슷한 물체의 가장자리 부분에서 진자의 균형을 맞추면 좀 더 쉽게 균형 점을 찾을 수 있다.
- ⑥ 피봇포인트에서 공의 중심까지의 거리를 측정하고, 이를 R_b 에 기록한다.
- ⑦ 진자를 다시 받침대 위에 올려 놓고, 방향이 올바른지 확인한다. 각도 표시기가 진자 막대의 오른쪽에 있는지 반드시 확인한다.
- ⑧ 발사 장치를 분리하여 진자가 자유롭게 움직일 수 있도록 한다. 진자 안의 공으로 5° 이하의 초기 움직임을 준다. 스톱워치를 이용하여, 최소 10번 진동하는데 걸리는 시간을 재고, 이 시간을 진동 수로 나누어 그 결과를 표 9.1에 T 로 기록한다.
- ⑨ I 값을 계산하고, 표 9.1에 기록한다.
- ⑩ 발사 장치를 장전한 다음, 각도 표시기를 2번 단계에서 얻은 각도보다 1-2° 작은 각도에 맞춘다. 진자가 표시기를 마지막 몇 도 정도만 움직이기 때문에, 이렇게 하면 표시기에 의해 진자가 느려지는 것을 거의 무시할 수 있다.
- ⑪ 발사 장치를 발사하고, 진자가 도달한 각도를 표 9.1에 기록한다. 매번 진자가 도달한 이전 각도보다 1-2° 작은 각도로 각도 표시기를 설정하여 이 과정을 수 차례 반복한다.

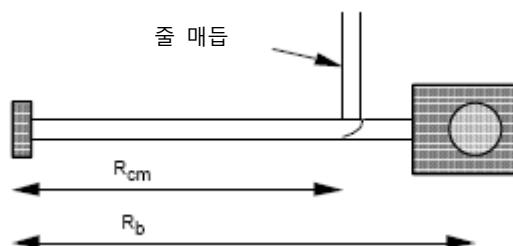


그림 9.1

계 산

- ① 진자가 도달한 평균 각도를 구하고, 표 9.1에 기록한다.
- ② 포물체 발사 장치의 포구 속도를 계산한다.

표 9.1

M = _____

m = _____

R_{cm} = _____

R_b = _____

T = _____

I = _____

θ_1	
θ_2	
θ_3	
θ_4	

평균 θ = _____

포구 속도 = _____

문 제

- ① 이렇게 구한 결과를 확인하는데 사용할 수 있는, 포구 속도 구하는 또 다른 방법이 있는가? 다른 방법을 사용하여 두 가지 결과를 비교하는 것이 필요할 수도 있다.
- ② 이 실험에서 오류를 발생시킬 수 있는 부분은 어떤 부분인가? 이러한 오류가 결과에 얼마나 영향을 미치는가?
- ③ 공과 진자가 충돌 할 때 운동에너지가 보존되면, 계산이 매우 간단해진다 (이론 부분 참조). 공과 진자의 충돌에서 운동에너지의 몇 퍼센트가 상실되는가? 이 충돌에서 에너지는 보존된다고 가정하는 것이 가능한가?
- ④ 진자의 질량을 증가시키면, 충돌에서 에너지 전달 효율이 증가하는가, 감소하는가? 실험해 보라.
- ⑤ 실험 8에서, 속도에 대한 다음과 같은 대략적인 방정식을 사용하였다.

$$v_b = \frac{M}{m} \sqrt{2gR_{cm}(1 - \cos\theta)}$$

이 방정식을 사용했을 때의 속도는 얼마인가? 두 계산 값에 큰 차이가 있는가? 이 두 계산 값의 차이를 증가시키는 것은 어떤 요인인가? 대략적인 방정식으로 더 정확한 결과값을 얻으려면, 탄동 진자를 어떻게 만들어야 하는가?

실험 10: 30°, 60° 의 사정 거리는 동일한가?

필요 기구:

- 포물체 발사 장치와 강철 공
- 높이를 포구 높이에 맞추기 위한 상자

목 적

이 실험에서는, 공이 같은 높이에서 발사될 경우, 30°에서 발사한 공의 사정거리가 60°에서 발사한 공의 사정거리와 동일함을 증명한다.

이 론

사정 거리는 발사 장치의 포구와 공이 부딪히는 지점 사이의 수평 거리 x 이며, 이 값은 식

$x = (v_0 \cos \theta) t$ 로 구한다. 여기에서, v_0 은 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도, θ 은 수평면에 대한 경사도, t 는 비행 시간을 의미한다.

만약 공이 발사 장치의 포구와 같은 높이에 있는 지점에 떨어질 경우, 공의 비행시간은 공이 그 궤도의 최고 지점에 도달하는데 걸리는 시간의 두 배가 된다.

$$t = 2t_{peak} = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

여기에서 g 는 중력에 의한 가속도이다.

x 에 대한 방정식에 위 t 를 대입하면,

$$x = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \text{ 가 되고,}$$

삼각함수를 통해

$$x = \frac{2v_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{ 가 된다.}$$

$$\sin(60^\circ) = \sin(120^\circ)$$

이므로, 30° , 60° 에 대한 사정 거리는 같다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 “반복 결과”를 참조한다.

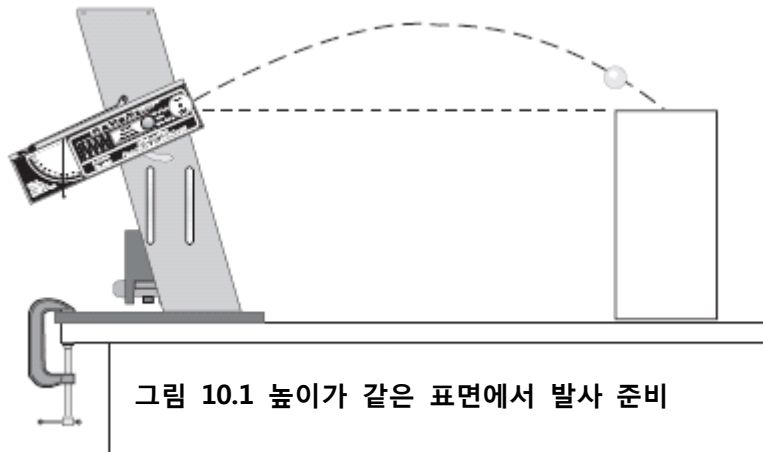


그림 10.1 높이가 같은 표면에서 발사 준비

준 비

- ① 튼튼한 탁자의 한 쪽 끝에 포물체 발사 장치를 클램프로 고정 시키고, 공이 탁자에 떨어지도록 발사 장치를 조준한다.
- ② 포물체 발사 장치 각도를 30° 로 조정한다.
- ③ 포물체 발사 장치에 강철 공을 넣고 장거리 위치에 맞춘다.

▶ 주의: 단거리 설정의 경우 각도에 따라 포구 속도가 더 쉽게 변화하기 때문에, 일반적으로 이 실험이 잘 되지 않는다.

- ④ 공 하나를 발사하여 떨어지는 지점을 확인한다. 해당 위치에 상자를 거꾸로 놓아, 공이 발사 장치 포구와 같은 높이에 떨어지도록 한다. (그림 10.1)

순 서

- ① 공 하나를 30° 각도에서 발사하여, 공이 상자 위에 떨어지는지 확인한다.
- ② 발사 장치 각도를 60° 로 조정해 다음, 다시 한 번 공을 발사한다. 공이 또 다시 상자 위에 떨어지는 것에 주의를 기울인다. 따라서, 사정 거리는 같다고 할 수 있다.

- ③ 각도를 45도로 변경하고 공을 다시 발사한다. 이번에는 공이 상자를 지나 더 먼 곳에 떨어지는 것을 관찰한다.
- ④ 질문: 동일한 사정거리를 갖는 다른 각도 쌍은 무엇인가? 20도와 70도, 35도와 55도 등, 그 합이 90도가 되는 각도 두 개를 골라 실험해 볼 수 있다.

실험 11 (증명): 두 공을 서로 다른 속도로 동시에 수평 발사하기

필요 기구:

– 포물체 발사 장치 2개, 강철 공 2개

목 적

이 증명에서는, 공을 탁자에서 수평으로 발사했을 때, 초기 속도와 관계 없이 공이 동시에 바닥에 떨어진다는 것을 보여준다.

이 론

두 개의 공을 같은 탁자(같은 높이 y)에서 수평으로 발사하면, 두 공의 포구 속도는 서로 다르다.

포물체의 수직 운동과 수평 운동은 서로 독립적이다. 공이 움직이는 수평 거리 x 는 초기 속도 v_0 에 따라 달라지며, $x = v_0 t$ 식을 이용하여 구한다. 이 때, t 는 비행 시간을 의미한다. $y = \frac{1}{2}gt^2$ 이므로 비행 시간은 공이 떨어지는 수직 거리에만 영향을 받는다. 각 공의 수직 거리가 같으므로, 각 공의 비행 시간도 같아야 한다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 "반복 결과"를 참조한다.

준 비

- ① 튼튼한 탁자 위에 두 개의 포물체 발사 장치를 서로 근접하게 놓은 다음 클램프로 고정 시킨다. 두 발사 장치 모두 공이 바닥에 떨어지도록 탁자 바깥 쪽의 같은 방향으로 조준한다.
- ② 공이 탁자에서 수평 발사되도록 두 발사 장치의 각도를 0도로 조정한다.

순 서

- ① 각 포물체 발사 장치에 강철 공을 넣고, 하나는 단거리, 다른 하나는 장거리 위치에 맞춘다.

-
- ② 학생들을 조용히 시킨 후 공이 바닥에 떨어지는 소리를 들어보게 한다. 소리가 한 번만 들렸는지 물어본다. 소리가 한 번만 들렸을 경우, 공이 동시에 떨어졌다는 것을 의미한다.
 - ③ 두 발사 장치의 당김줄을 한 손에 들고 동시에 당겨, 공이 동시에 발사되도록 한다.
 - ④ 공이 땅에 떨어진 후, 학생들에게 소리가 한 번 났는지, 두 번 났는지 물어본다.

실험 12 (증명): 고리 사이로 발사하기

필요 기구:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| - 포물체 발사 장치와 플라스틱 공 | - 받침대 위의 고리 클램프 5개 |
| - 포토게이트 2개 | - 포토게이트 설치용 까치발 |
| - 미터 막대 | |

목 적

이 증명에서는, 탁자에서 수평 발사한 공의 경로가 포물선임을 확인한다.

이 론

사정 거리는 발사 장치의 포구와 공이 부딪히는 지점 사이의 수평 거리 x 이며, 구하는 식은 다음 과 같다.

$$x = (v_0 \cos \theta) t$$

여기에서, v_0 은 공이 포구를 떠날 때의 초기 속도, t 는 비행 시간을 의미한다.

t 시간 동안, 공의 수직 위치인 y 는 다음 식으로 나타낼 수 있으며,

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

여기에서, y_0 은 공의 초기 위치, g 는 중력에 의한 가속도이다.

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 소개 부분의 "반복 결과"를 참조한다.

준 비

- ① 증명을 시작하기에 앞서, 사용할 사정 거리 설정에 대한 초기 속도를 구한다. 포토 게이트를 장착하고 컴퓨터를 이용하여 초기 속도를 구하거나, 공을 수평으로 발사한 후 x, y 를 측정하여 초기 속도를 구한다. (실험 1, 2 참조)
- ② 증명을 준비하기 위해, 탁자에서 쏜 공이 땅에 떨어지도록 포물체 발사 장치를 조정한 뒤, 탁자에 클램프로 고정시킨다.

- ③ 공이 탁자에서 수평 발사되도록 두 발사 장치의 각도를 0도로 조정한다.

순 서

- ① 학생들이 앞에서 포구 위치에서의 공의 초기 높이를 측정한다.
 ② 공이 땅에 떨어질 때까지 매 1/10초마다 공의 수평 위치 및 수직 위치를 계산한다.

$t \text{ (sec)}$	$x = v_0 t \text{ (cm)}$	$y = y_0 - (1/2)gt^2 \text{ (cm)}$
0.1		
0.2		
0.3		
0.4		
0.5		

- ③ 발사 장치에서 멀리 떨어진 바닥에 일직선으로 2미터 막대를 놓는다. 발사 장치 받침대의 뒤 조임 나사를 분리하여, 발사 장치의 뒷부분을 위쪽으로 회전시킬 수 있도록 한다. 발사 장치 뒤를 통해 보면서 2미터 막대의 끝부분과 시계가 나란히 오도록 정렬하여, 2m 막대가 공의 경로와 일직선이 되도록 한다. 발사 장치 높이를 다시 조정한다.
- ④ 각 x , y 쌍을 측정하고, 해당 위치에 받침대 위에 장착된 고리 클램프를 놓는다. (그림 12.1) 가능하면, 마지막 고리 두 개는 수직에서 조금 기울어지게 조절하여, 공이 비스듬히 고리를 지나지 않아도 되도록 하는 것이 가장 좋다. 공의 경로 끝 부분에는 공을 받을 수 있도록 컵을 놓아도 된다.
- ⑤ 고리 사이로 공을 발사한다.
- ⑥ 학생들에게 고리가 어떤 모양을 형성하고 있는지 물어본다.

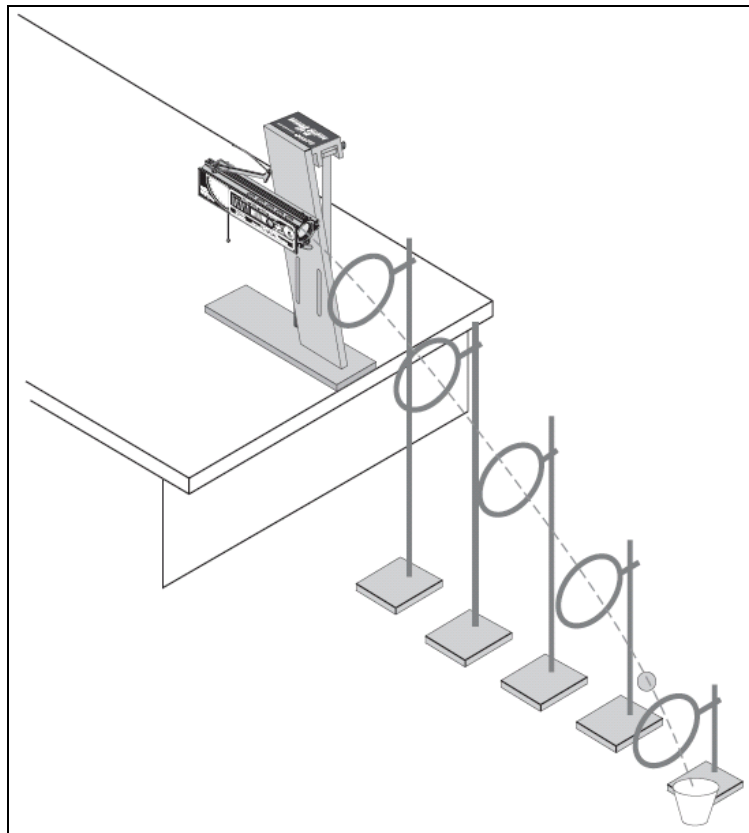


그림 12.1 고리 놓기

실험 13 (증명): 탄성충돌과 비탄성충돌

필요 기구:

- 포물체 발사 장치
- 플라스틱 공이나 강철 공
- 탄동 진자

목 적

이 증명에서는, 탄성충돌과 비탄성충돌에서 운동에너지 전달 차이를 확인한다.

이 론

충돌하는 물체 사이에 전달되는 운동에너지의 양은 그 충돌의 탄성에 따라 달라진다. 진자에 공이 잡히는 대신 튀어나가도록 진자를 뒤집어 놓으면, 이 효과를 증명할 수 있다.

순 서

- ① 진자에 공을 발사하고, 도달한 각도를 기록한다.
- ② 진자를 분리한 다음 거꾸로 다시 설치한다. (공을 받는 부분이 발사 장치에서 멀어지도록)
- ③ 동일한 설정으로 동일한 공을 발사한 다음, 도달한 각도를 기록한다. 공과 진자의 충돌은 완벽한 탄성이 아니므로, 운동에너지는 여전히 보존되지 않는다. 그러나, 1단계의 완전 비탄성충돌보다는 탄성에 더 가까우므로, 더 큰 운동에너지가 전달된다.

지 도 자 가 이 드

실험 1 : 포물체 운동

순 서

▶ 주의: 최선의 결과를 위해, 포물체 발사 장치가 튼튼한 탁자에 클램프로 단단히 고정되어 있는지 확인한다. 포구가 조금이라도 흔들릴 경우 상반되는 데이터를 얻게

- A) 본 매뉴얼에서 테스트한 발사 장치의 포구 속도는 6.5 m/s이다. (단거리 발사 장치 최대 설정, 나일론 공)
- B) 선택한 각도에서 사정 거리를 구하려면, 이론 부분의 2차 방정식을 풀어야 한다. 학생들에게 시키거나, 해답을 주어도 좋다.

$$t = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{(v_0 \sin \theta)^2 + 2g(y_0 - y)}}{g}$$

분 석

- ① 공이 발사된 각도에 따라 차이가 생긴다. 다음 표는 일반적인 결과이다:

각도	예상 사정 거리	실제 사정 거리	백분율 차이
30	5.22	5.19	0.57%
45	5.30	5.16	2.64%
60	4.35	4.23	2.87%
39	5.39	5.31	1.48%

▶ 주의: 이 경우, 최대 각도는 45°가 아니고, 60°에서의 사정거리가 30°에서의 사정거리와 동일하지도 않다. 이는 공의 초기 높이가 충돌 지점의 높이와 같지 않기 때문이다 이 설정(발사 장치의 높이가 땅 위에서 1.15m일 때)에서의 최대 사정 거리는 39°인 것으로 계산되었으며, 이는 실험상으로도 증명되었다.

- ② 정확도를 판단하는 방식에 따라 답이 다르다. 오류의 주요 원인은 공기 저항 효과를 무시하는 데 있다.

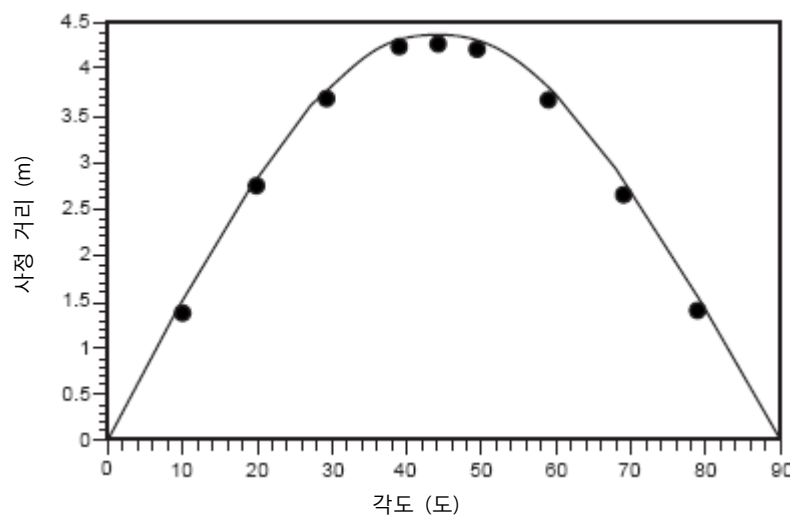
실험 2 : 포토게이트를 이용한 포물체 운동

▶ 주의: 초기 속도를 구하는 방식을 제외하고, 이 실험은 실험 1과 동일하다.

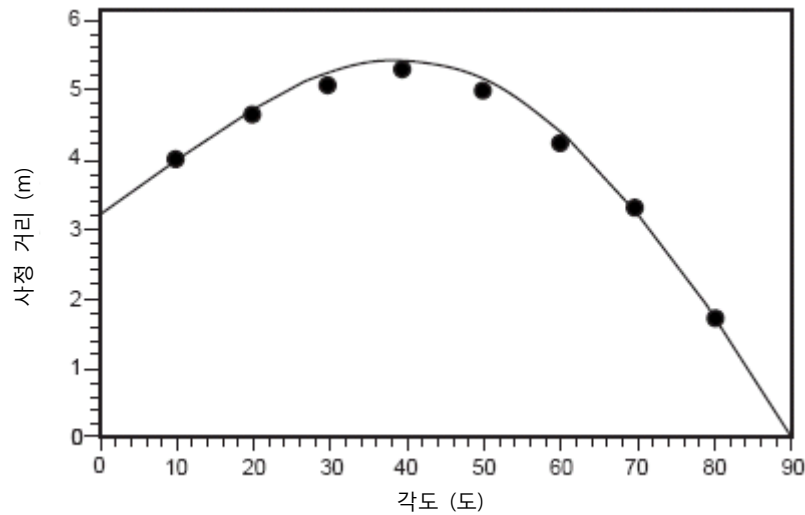
실험 3 : 포물체 사정 거리 vs. 각도

순 서

높이가 동일한 표면에서 발사:



탁자에서 발사:



▶ 주의: 위 곡선은 각 경우의 계산된 사정 거리를 나타낸 것이다. 실제 측정한 사정 거리는 점으로 표시되어 있다.

문 제:

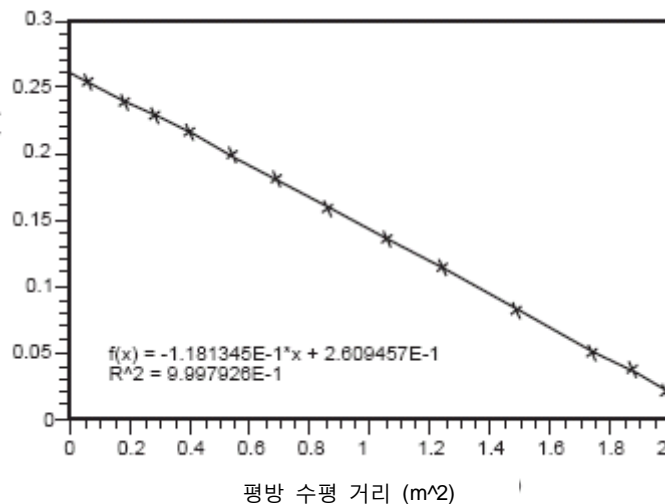
- ① 높이가 같은 표면에서는, 45° 에서 최대 사정 거리를 갖는다. 높이가 같지 않은 표면에서는, 최대 사정 거리를 갖는 각도가 포물체의 초기 높이에 따라 달라진다. 우리가 사용한 실험 설정에서는 초기 높이가 1.15m이므로, 40° 에서 최대 사정 거리를 갖는다. (이론상 수치는 39°)
- ② 최대 사정 거리 각도는 탁자 높이와 함께 감소한다.
- ③ 최대 거리는 탁자 높이와 함께 증가한다.

실험 4 : 포물체 경로

분 석

- ⑧ 번갈아 가며, 땅으로부터 자신의 거리를 측정한다.
- ③ 땅에서부터 측정한 수직 거리를 나타낸 그래프. 이 방식으로 했을 때, 교차 지점은

땅 위에 설치된 발사 장치의 높이이다.



- ④ 이 테스트에서, (땅으로부터 측정한) 기울기는 -0.118이다. (초기 높이부터 측정해 내려가면, 양수의 같은 값을 얻는다.) 어떤 경우든, 기울기는 $\frac{g}{2v_0^2}$ 이다.
- ⑤ 여기에서 계산한 기울기로 초기 속도 6.44m/s를 구할 수 있다. 이는 실험 1,2에서 계산한 속도와 상당히 잘 부합한다.
- ⑥ ⑦ 이 방식으로는 결과가 다양하게 나온다. 주목할 점은, 각 개인의 측정값은 많은 측정값과 그에 맞는 곡선만큼 정확하지 않다는 것이다.

문 제

- ① 그렇다. 이를 통해 y 는 x^2 의 함수라는 것을 알 수 있다.
- ② y vs. x 를 작도하면 선형 대신 포물선을 얻게 된다.
- ③ 포물체는 포물선을 따라 움직인다. (공기 저항 무시)

실험 5 : 에너지 보존

분 석

- ④ 포토게이트 방식을 사용하여 공의 초기 속도가 4.93m/s 라는 것을 알 수 있다. (나일론 공, 단거리 발사 장치 중간 설정) 공의 질량은 9.6g 이므로, 총 운동에너지는 0.117J 가 된다.
- ⑤ 공의 평균 높이는 1.14m 이므로, 위치 에너지는 0.107J 이다.
- ⑥ 원래 에너지의 8.5% 가 손실되었다.

▶ 주의: 공기 저항 만으로 이 만큼의 에너지가 손실되었다고 보기는 힘들다. 특히, 실험 3과 4의 결과가 매우 정확하다고 가정할 경우에는 더욱 그렇다. 따라서 초기 속도와 높이의 실제 측정값에서 계산상에 오류가 있었을 가능성이 더 높다.

실험 6 : 2차원에서의 운동량 보존

준 비

- ② 단거리보다는 중거리를 사용할 수 있도록 준비하는 것이 가장 좋다. 단거리 설정보다 중거리 설정에서 더 예측 가능한 결과를 얻을 수 있다.

분 석

- ④⑥ 운동량의 x 값에 대한 결과는 초기 값의 5% 이내여야 한다. 총 y 값은 x 값과 비교했을 때 작아야 한다. 여기에서 백분율 차이는 정확한 지표가 되지 않을 수도 있다.

문 제

- ①② 두 방향 모두에서 운동량이 보존된다.
- ③ 탄성충돌에서 운동에너지는 거의 보존된다. 이 충돌은 완전히 탄성이 아니기 때문에, 얼마간의 손실이 있을 수는 있다.
- ④ 비탄성충돌에서 에너지는 보존된다. 그러나 위치에너지는 보존되지 않는다.
- ⑤ 각도는 거의 90° 가 되어야 한다. (우리 실험에서의 각도는 84° 이다.)
- ⑥ 비탄성일 경우에는, 탄성일 경우보다 각도가 더 작다. 정확한 각도는 탄성 정도에 따라 달라지며, 탄성 정도는 사용한 테이프의 종류와 양에 따라 달라진다.

실험 7 : 벽에 맞는 높이가 최대인 각도 찾기

순 서

- ① 어떤 식으로든 2% 이내로 최대 높이의 각도를 측정할 수 있어야 한다.
- ④ 공의 앞면 가장자리까지의 거리를 측정한다.
- ⑤ 공의 중심까지의 초기 높이를 측정한다.

분 석

- ④ 이 초기 속도는 다른 방식으로 구한 초기 속도에 근사해야 한다. 실험 1에서의 방식으로 초기 속도를 구해, 이 실험 나머지 부분의 계산에 이용하는 것도 좋다.
- ③ 측정 각도와 계산 각도는 3% 이내로 일치해야 한다.

문 제

- ③ 공이 벽에 부딪힐 때쯤이면, 공은 이미 궤도의 최고점에 도달한 상태이다. 이를 증명하려면, x 에 대한 y 의 도함수를 구한다.

$$y = y_0 + x \tan \theta_{\max} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_{\max}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta_{\max} - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \theta_{\max}}$$

여기에 $\theta_{\max} = \tan^{-1} \left(\frac{v_0^2}{gx_{\max}} \right)$ 를 대입하면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0^2}{gx_{\max}} - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{v_0^2}{gx_{\max}} \right) \right]}$$

$$\cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right] = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 을 대입하여 간단히 하면,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0^2}{gx_{\max}} - \frac{gx}{v_0^2 \left(\frac{gx_{\max}}{\sqrt{v_0^4 + g^2 x_{\max}^2}} \right)^2} = \frac{v_0^2}{gx_{\max}} - \frac{x(v_0^4 + g^2 x_{\max}^2)}{v_0^2 + gx_{\max}^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0^2}{gx_{\max}} - \frac{v_0^2 x}{gx_{\max}^2} - \frac{xg}{v_0^2}$$

$x = x_{\max}$ 일 때, 이 도함수의 값은 음수이다.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{\max}} = -\frac{gx_{\max}}{v_0^2}$$

- ④ 최대 높이에 대한 방정식을 풀어 x 를 구하면,

$$\tan \theta_{\max} = \frac{v_0^2}{gx} \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{g}$$

y 에 대한 방정식에 이 값을 대입하여 최대 높이를 구한다.

$$y = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{g \left(\frac{v_0^2}{g} \right)}{v_0^2} = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{g}$$

$$y = y_0$$

실험 8 : 포물체 속도 - 근사법

순 서

- ② 여기에서 정확한 질량은 중요하지 않다. 최선의 결과를 위해서는, 어느 정도 큰 진동을 주는 값을 골라 사용한다.
- ⑤ 강철공을 사용하고 진자에 추가로 질량을 더하면, 균형점은 공을 잡는 장치 위 어딘가에 위치한다. 이 경우 줄을 사용하기는 어려워지지만, 직선 면에서 진자의 균형을 맞춰 쉽게 질량 중심을 찾을 수 있다.
- ⑧ 진자가 도달한 각도는, 그 차이가 연속 시도에서 최대 1° 를 넘어서는 안된다.

계 산

- ② 근사법의 이론 부분에서 소개한 방정식을 이용한다.

문 제

- ⑤ 속도를 측정하는 또 다른 최고의 방법은 실험 1의 첫 번째 부분에 설명되어 있다.
- ⑥ 가장 큰 오류의 원인은 여기에서 사용한 방정식이다. 이 방정식은 근사한 식으로, 관련 질량들을 점질량으로 가정하고 있다. 이 방정식이 결과에 영향을 미치는 정도는 진자와 공의 정확한 정밀한 기하학적 배열에 따라 달라지며, 5-8% 사이여야 한다.
- ⑦ 전형적으로 공의 운동에너지의 70%가 상실된다. 따라서 KE가 보존된다고 가정할 수 없다.
- ⑧ 충돌의 탄성 정도가 클수록 더 많은 에너지가 전달된다.

실험 9 : 포물체 속도 - 정밀법

순 서

- ② 여기에서 정확한 질량은 중요하지 않다. 최선의 결과를 위해서는, 어느 정도 큰 진동을 주는 값을 골라 사용한다.
- ⑤ 강철공을 사용하고 진자에 추가로 질량을 더하면, 균형점은 공을 잡는 장치 위 어딘가에 위치한다. 이 경우 줄을 사용하기는 어려워지지만, 직선 면에서 진자의 균형을 맞춰 쉽게 질량 중심을 찾을 수 있다.
- ⑧ 가능한 제일 작은 측정 각도를 이용하여, 이 주기를 될 수 있는 한 정확하게 측정한다.
- ⑪ 진자가 도달한 각도는, 그 차이가 연속 시도에서 최대 1° 를 넘어서는 안된다.

계 산

- ② 정밀법의 이론 부분에서 소개한 방정식을 이용한다.

문 제

- ① 속도를 측정하는 또 다른 최고의 방법은 실험 1의 첫 번째 부분에 설명되어 있다.
- ② 오류의 원인에는, 마찰, 측정 오류, 그리고 머피의 법칙이 포함된다.

-
- ③ 전형적으로 공의 운동에너지의 70%가 상실된다. 따라서 KE가 보존된다고 가정할 수 없다.
 - ④ 사용한 질량들간의 차이가 클수록 에너지 전달 효율은 감소한다.
 - ⑤ 근사법의 결과는 일반적으로 정밀법 결과 값보다 5-7% 정도 더 크다. 진자의 추가 더 “뽕족”할수록, 근사법이 더 정확해진다.